COLEGIO DE BACHILLERES
SECRETARÍA DE PLANEACIÓN ACADÉMICA
COORDINACIÓN DEL SISTEMA DE ENSEÑANZA ABIERTA

MATEMÁTICAS I

FASCÍCULO II

DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

2.1 MÉTODOS ARITMÉTICOS

2.1.1 Método por Ensayo y Error

2.1.2 Razones y Proporciones

2.1.3 Diagramas de Operaciones

2.2 MODELOS ALGEBRAICOS

PROPÓSITO

En el capítulo anterior operaste con los números reales, y aplicaste las propiedades de sus operaciones.

Para este capítulo:

¿QUÉ APRENDERÁS?

Al valorar la importancia del álgebra para la solución de problemas que con la aritmética son mas laboriosos de resolver.

¿CÓMO LO APRENDERÁS?

Comparando los métodos aritméticos y los algebraicos; analizando los ejemplos que se incluyen en el contenido, y desarrollando las actividades que se proponen.

¿PARA QUÉ TE VA A SERVIR?

Para identificar los modelos algebraicos como una herramienta que nos ahorran tiempo y esfuerzo en la solución de problemas concretos.

DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

2.1 MÉTODOS ARITMÉTICOS

Generalmente aprendemos matemáticas como un proceso mecánico, donde lo único que se requiere es sumar, restar, multiplicar o dividir dos cantidades; sin embargo, las matemáticas son la base del razonamiento y toma de decisiones en muchas de nuestras actividades, simplemente si tuviéramos prisa, ¿cómo tomaríamos la decisión de aplicar un procedimiento u otro para concluir una actividad, sin calcular el tiempo que nos lleva cada alternativa? en este caso nos auxilia la aritmética, que es una área de las matemáticas con las que te has relacionado desde que conociste los números para realizar operaciones con ellos.

Ahora bien, en ocasiones nos enfrentamos a problemas que con la aritmética es muy laborioso solucionar, porque no tenemos todos los datos, y por consecuencia no podemos tomar una decisión certera.

En estos casos nos auxilia el álgebra, por ejemplo: Imagínate que te ofrecen trabajo de vendedor en dos compañías; en la primera te ofrecen un sueldo base de $ 500.00 mensuales, más el 4% de comisión sobre las ventas totales del mes, y en la segunda únicamente el 7% de comisión sobre las ventas totales del mes. Además sabes que el promedio de ventas en un mes supera los $10,000.00 por vendedor y que tú eres muy hábil en este tipo de trabajos. ¿Por qué compañía te decidirías?

Si no sabes álgebra seguramente aceptarías la oferta de la primer compañía, pero si tienes conocimientos algebraicos, antes de decidir harías algunos cálculos, que te ayudarían a tomar la decisión más certera.

Pero iniciemos analizando las ventajas del álgebra, para lo cual es necesario conocer los alcances de los métodos aritméticos como son: El Método de Ensayo y Error que nos permitirá ejercitar las operaciones aritméticas, aplicadas a la resolución de problemas. El Método de Razones y Proporciones nos ayudará a rescatar nuestros conocimientos de proporcionalidad. Finalmente el Método de Diagramas de Operaciones que establece el puente para llegar al álgebra.

2.2.1 MÉTODO POR ENSAYO Y ERROR

Para solucionar un problema por el método de ensayo y error, necesitamos intentar encontrar el valor correcto resolviéndolo con cantidades aproximadas, si con la primera el resultado es mucho menor del que esperamos, debemos aumentarla y si se excede, debemos disminuirla. También es indispensable que leamos, las veces que sea necesario el planteamiento del problema para definir: qué datos tenemos, qué es lo que necesitamos encontrar, y qué procedimiento podemos aplicar. Recuerda también que para resolver un problema aritmético, únicamente requieres de las operaciones básicas y analizarlo correctamente.

EJEMPLO

Se tiene un terreno cuadrado cuyos lados miden 30 metros y se tiene bardeada una porción rectangular de 20 metros de largo por 8 de ancho. Si se quiere ampliar el área bardeada a 364 m^2, además aumentar la misma longitud en su largo como en su ancho, ¿qué longitud se debe ampliar la barda en cada lado?

Para tener una mejor idea del problema que se plantea, podemos recurrir a la figura 2.

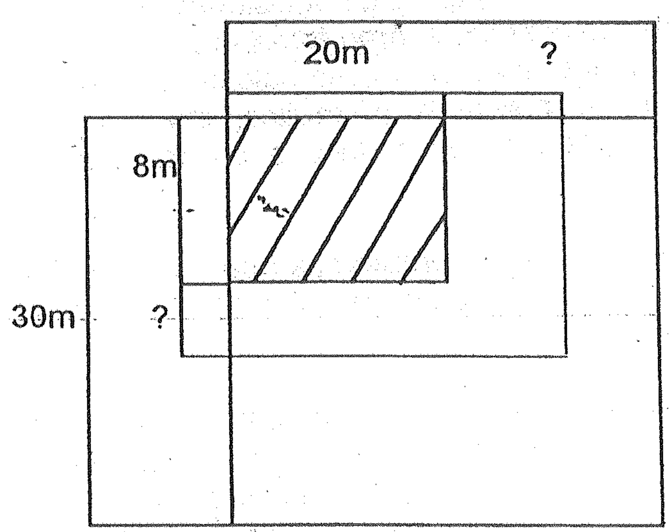


Figura 2. El área sombreada corresponde a la actualmente bardeada. La línea punteada delimita el área deseada. ¿A cuánto corresponde la longitud ampliada?

Antes de continuar, recuerda que para calcular el área de un rectángulo, multiplicamos la longitud del largo por la del ancho. Así, el área que actualmente está bardeada es de 160 m^2 y el área que deseamos obtener, es 364 m^2. Como debemos obtener estas nuevas longitudes al sumar la misma cantidad al ancho y largo actuales, para resolver el problema tenemos que encontrar un número tal, que al sumarlo a 20 y 8, el producto de los resultados respectivos sea 364.

Podemos enfrentar este problema de diversas maneras, por el momento lo vamos a hacer con el método de ensayo y error que consiste en ir probando o ensayando varios valores hasta llegar al resultado correcto.

Sumemos 1 a cada una de las longitudes y multipliquemos los resultados obtenidos:

$$(20 + 1) \times (8 + 1) = 21 \times 9 = 189$$

Esta cantidad es menor a la deseada.

Sumemos entonces 2 a cada una de las longitudes y multipliquemos los resultados obtenidos:

$$(20 + 2) \times (8 + 2) = 22 \times 10 = 220$$

que es todavía menor que la cantidad requerida.

Sumemos ahora 10 a cada una de las longitudes y multipliquemos los resultados obtenidos nuevamente:

$$(20 + 10) \times (8 + 10) = 30 \times 18 = 540$$

que es mayor que la cantidad requerida.

Esto es, si aumentamos 2 metros a cada lado, obtenemos un área de 220 m^2 y si aumentamos 10 metros a cada lado obtenemos un área de 540 m^2. Como al aumentar la longitud de los lados aumenta el área y el área que buscamos está entre 220 y 540, el número que buscamos debe estar entre 2 y 10.

Hagamos la prueba con 5:

$$(20 + 5) \times (8 + 5) = 25 \times 13 = 325$$

que es todavía menor que 364. así que probaremos con otro número que sea mayor que 5 y menor que 10. Ya que 325, el valor correspondiente a 5, está más cercano a 364 que lo está 540, el valor correspondiente a 10, probaremos con un número que sea más cercano a 5 que a 10.

Hagámoslo con 6:

$$(20 + 6) \times (8 + 6) = 26 \times 14 = 364$$

que es el área que buscamos. Así, para resolver el problema se requiere de aumentar 6 metros a la longitud del largo y del ancho, respectivamente.

EJEMPLO

Una compañía arrendadora de automóviles cobra por la renta de un auto \$120.00 pesos diarios, más \$ 2.00 pesos por kilómetro recorrido; otra compañía cobra por la renta del mismo auto \$ 80:00 pesos diarios, más \$ 2.50 pesos por kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros se deben recorrer diariamente para que la renta del automóvil sea la misma en la dos compañías?

Resolveremos el problema nuevamente por el método de ensayo y error. Consideremos varios valores, correspondientes a kilómetros recorridos para calcular el costo respectivo en cada una de las compañías.

<u>Con 50 kilómetros</u>:

Costo en la primera compañía:

$$120.00 + 50 \times 2.00 = 120.00 + 100.00 = 220.00$$

Costo en la segunda compañía:

$$80.00 + 50 \times 2.5 = 80.00 + 125.00 = 205.00$$

En este caso el costo en la primera compañía es mayor que en la segunda.

<u>Con 60 kilómetros</u>:

Costo en la primera compañía:

$$120.00 + 60 \times 2.00 = 120.00 + 120.00 = 240.00$$

Costo en la segunda compañía:

$$80.00 + 60 \times 2.5 = 80.00 + 150.00 = 230.00$$

En este caso, nuevamente, el costo es mayor en la primera compañía que en la segunda.

<u>Con 70 kilómetros</u>:

Costo en la primera compañía:

$$120.00 + 70 \times 2.00 = 120.00 + 140.00 = 260.00$$

Costo en la segunda compañía:

$$80.00 + 70 \times 2.50 = 80.00 + 175.00 = 255.00$$

Todavía el costo es mayor en la primera compañía que en la segunda. Para tener una mejor visión del problema resumiremos los datos en una tabla.

Kilómetros Recorridos	Costo en la Primera Compañía	Costo en la Segunda Compañía
50	220.00	205.00
60	240.00	230.00
70	260.00	255.00

Tabla 1. La primera columna corresponde a los kilómetros recorridos, la segunda el costo de rentar el automóvil en la primer compañía al recorrer el número de kilómetros indicado en cada renglón, y la tercera, el costo que tiene rentarlo en la segunda compañía al recorrer, también, el número de kilómetros indicado en cada renglón.

Como puedes observar, el tener concentrados los datos relevantes del problema en la tabla nos puede ayudar a analizarlos.

De estos datos observamos que cuando crece el número de kilómetros recorridos, los dos costos también crecen. Asimismo vemos que el costo en la primer compañía es mayor que en la segunda, aunque la diferencia entre los dos costos disminuye cuando aumentamos el número de kilómetros. Si analizas con cuidado la tabla te darás cuenta que por cada 10 kilómetros que se aumenta, los costos para la primera compañía aumenta 20.00 pesos y los de la segunda 25.00 pesos. De esta manera podemos obtener calcular valores, sin tener que hacer tantos cálculos.

Consideremos nuevos valores para los kilómetros recorridos, 80, 90, 100 y 110 por ejemplo, calculemos los dos costos correspondientes para cada uno de ellos, al aumentar de 20.00, en 20.00 en la primera columna y de 25.00 en 25.00 en la segunda concentremos los datos en la tabla y aumentemos cuatro renglones a la tabla anterior.

Kilómetros Recorridos	Costo en la Primera Compañía	Costo en la Segunda Compañía
50	220.00	205.00
60	240.00	230.00
70	260.00	255.00
80	280.00	280.00
90	300.00	305.00
100	320.00	330.00
110	340.00	355.00

Tabla 2. Se aumentaron los renglones correspondientes a 80, 90, 100 y 110 km recorridos. Se calculó el costo para la primer compañía al aumentar de 20 en 20 pesos, y para la segunda de 25 en 25.

Como puedes observar, el kilometraje que se requiere para que el costo de la renta sea igual en las dos compañías es 80. Además, observa que cuando el número de kilómetros es mayor que 80, el costo de la renta en la segunda compañía es ahora mayor que en la primera y que la diferencia crece.

Ahora observa que el método de ensayo y error, nos sirve para solucionar problemas donde nos hace falta un dato, y lo que tenemos que hacer es aproximarnos con diversos valores y comparar los resultados obtenidos hasta encontrar el correcto ¿Te pareció muy complicado el procedimiento? ¿Crees que exista una forma más sencilla para solucionarlos?

2.1.2 RAZONES Y PROPORCIONES

El método de razones y proporciones se aplica como un *auxiliar del método de ensayo y error*, en problemas donde *dos datos están relacionados*, y se pueden expresar como una fracción, para *obtener un tercer dato que también está relacionado* y se conoce como constante o coeficiente de proporcionalidad.

Recuerda que antes de analizar el procedimiento de resolución para los ejemplos que se plantean, debes intentar solucionarlos y comparar el procedimiento que realizaste con el que aparece en el fascículo.

EJEMPLO

La inflación en los últimos tres años fue de 35%, 20% y 13 % respectivamente ¿Cuál era el precio de un artículo hace tres años si ahora cuesta $338.66? si suponemos que su precio ha crecido al mismo ritmo que la inflación.

Para aclarar el problema revisa la tabla 3.

INFLACIÓN		
DE HACE	A HACE	%
3 años	2 años	35
2 años	1 año	20
1 año	A la actualidad	13

Tabla 3. Los últimos tres años abarcan el actual, el anterior y el de hace dos. La inflación se determina en función del año anterior.

Este problema lo podemos solucionar desde diversos métodos, sin embargo, primero lo abordaremos desde el método de ensayo y error, para lo cual se calcula la devaluación de 100 y 200 pesos de hace 3 años, considerando los porcentajes inflacionarios.

Para calcular la inflación de $100.00 analiza la siguiente tabla:

TIEMPO	VALOR DE $100.00
Hace 3 años	**$100.00**
Hace 2 años	**100.00 + 35%**
Hace 1 año	**(100.00 + 35%) + 20%**
Actualmente	**[(100.00 + 35%) + 20%]+ 13%**

Tabla 4. En la segunda columna aparece como se incrementó el valor de los $100.00 de acuerdo a la inflación.

Hace dos años:

Para obtener el valor que conforme a la inflación tomaron hace dos años los 100.00 pesos de hace tres años, le sumamos la cantidad correspondiente al porcentaje de inflación de ese año (35%).

$$100.00 + 0.35\,(100.00) = 135.00 \qquad (1)$$

reagrupamos, en vista de la propiedad distributiva*,

$$(1 + 0.35)\,(100.00) = 135.00 \qquad (1')$$

Hace un año:

De la misma manera, para obtener el equivalente que conforme a la inflación tomaron hace un año los 135,000 pesos de hace dos, sumamos la cantidad correspondiente al porcentaje de inflación de ese año (20%).

$$135.00 + 0.20\,(135.00) = 162.00 \qquad (2)$$

$$(1 + 0.20)\,(135.00) = 1.20\,(135.00) = 162.00 \qquad (2')$$

* Recuerda que para sumarle un X% a una cantidad, se multiplica la cantidad por 1.X dado que 1 corresponde 100% y X al porcentaje que se le suma.

Este año:

Para calcular el valor actual procederemos en forma análoga.

$$162.00 + 0.13(162.00) = 183.06 \qquad (3)$$

$$(1 + 0.13)\,(162.00) = 1.13\,(162.00) = 183.06 \qquad (3')$$

Se hicieron los cálculos cuando se multiplicaron las cantidades por 1.35, 1.20 y 1.13 respectivamente.

Ahora procedamos a calcular el costo actual de 200 pesos.

Así para calcular a cuánto eran equivalentes hace dos años, de acuerdo con el índice de inflación, 200.00 de hace tres, multiplicamos 200.00 por 1.35.

$$1.35(200.00) \qquad (4)$$

Observamos que:

$$200.00 = 2(100.00) \qquad (5)$$

Entonces:

$$1.35(200.00) = 1.35\,(200.00) = 1.35\,(2(100.00)) \qquad (6)$$

Al reagrupar:

$$1.35\,(2(100.00)) = 2(1.35(100.00) \qquad (7)$$

O sea, que el valor correspondiente de hace dos años, de acuerdo a la inflación, de los 200.00 pesos de hace tres años, es el doble del correspondiente a 100.00

Para calcular los valores para hace un año y para este año, duplicamos los encontrados para 100.00 respectivamente.

Hace un año:

$$2(162.00) = 324.00$$

Este año:

$$2(183.06) = 366.12$$

Al resumir los resultados anteriores diremos que 200.00 es el doble de 100.00 y que también los valores correspondientes a 200.00, respecto a la inflación (270; 324.00; 366.12) son el doble de los que toma 100.00 (135.00; 162.00; 183.06) respectivamente.

Decimos entonces que los dos conjuntos de valores son proporcionales y los escribimos:

Hace tres años	**200.00 = 2(100.00)**
Hace dos años	**270.00 = 2(135.00)**
Hace un años	**324.00 = 2(162.00)**
Este año	**366.12 = 2(183.06)**

O bien:

$$\frac{200.00}{100.00} = \frac{270.00}{135.00} = \frac{324.00}{162.00} = \frac{366.12}{183.06} = 2$$

En este caso al número dos le llamamos el coeficiente de proporcionalidad.

Al repetir el proceso anterior veremos que si en lugar de 200.00 tomamos otra cantidad, los valores obtenidos también serán proporcionales con los correspondientes a 100.00. Por ejemplo, sabemos que 50.00 es la mitad de 100.00, luego, 50.00 pesos de hace tres años equivalen según la inflación a:

Hace dos años:

$$\frac{1}{2}(135.00) = 67.50$$

Hace un año:

$$\frac{1}{2}(162.00) = 81.00$$

Este año:

$$\frac{1}{2}(183.06) = 91.53$$

En este caso $\frac{1}{2}$ es el coeficiente de proporcionalidad.

Retomemos el problema original, que era encontrar el valor que tenían 338.66 pesos actuales, hace tres años. Apoyándonos en los valores que hemos encontrado podemos calcular el coeficiente de proporcionalidad.

Para tener una mejor visión del problema resumimos los datos en la siguiente **tabla:**

HACE TRE AÑOS	HACE DOS AÑOS	HACE UN AÑO	ESTE AÑO
$ 50.00	**$ 67.50**	**$ 81.00**	**$ 91.53**
100.00	135.00	162.00	183.06
?	?	?	338.66
200.00	270.00	324.00	366.12

Tabla 5.

Para calcular el coeficiente de proporcionalidad para 338.66 pesos actuales, podemos dividir dicha cantidad entre cualquier valor de este año.

Calculemos el coeficiente de proporcionalidad:

$$\frac{338.66}{183.06} = 1.85$$

o sea que:

$$\mathbf{338.66 = 1.85\ (183.06)}$$

Como los valores del segundo y tercer renglón deben ser proporcionales y por la igualdad anterior sabemos que el coeficiente de proporcionalidad es 1.85, para calcular los valores del tercer renglón basta con multiplicar por 1.85 los del segundo:

$$\mathbf{185.00 = 1.85(100.00)}$$
$$\mathbf{249.75 = 1.85(135.00)}$$
$$\mathbf{299.70 = 1.85(162.00)}$$

y para completar la **tabla 6** con estos valores tenemos:

HACE TRES AÑOS	HACE DOS AÑOS	HACE UN AÑO	ESTE AÑO
$ 50.00	$ 67.50	$ 81.00	$ 91.53
$\boxed{100.00}$	135.00	162.00	$\boxed{183.00}$
185.00	249.75	299.70	$\boxed{338.66}$
200.00	270.00	324.00	366.12

Tabla 6

Hemos visto como la proporcionalidad nos ayudó a resolver el problema. Tal vez en este momento te puede parecer, que sin usarla hubiera sido más fácil; esto se debe en parte a que, en el curso del mismo, se introdujo el concepto de proporcionalidad, pero para llegar a que los $338.66 son equivalentes a $185,00 de hace tres años, tendríamos que haber hecho muchos más cálculos si únicamente hubiéramos aplicado el método de ensayo y error.

Resolveremos ahora el siguiente problema con el método de ensayo y error, nos apoyaremos en el concepto de proporcionalidad. Puedes observar cómo su uso nos ahorra mucho trabajo.

EJEMPLO

En 1980 la población del estado de Sonora tenía aproximadamente 1'500,000 habitantes. si suponemos que la tasa media de crecimiento de 1975 a 1980 fue el 5% anual. ¿Cuántos habitantes tenía en 1975 y cuál fue el último año que tuvo este estado menos de 1'250,000?

Calcularemos el crecimiento de diferentes poblaciones, con la misma tasa de crecimiento que la enunciada en el problema. Si partimos de una población de 1'000,000 habitantes en 1975, tendremos:

1976:

1'000,000 + 0.05 (1',000,000) = 1'000,000 + 50,000 = 1'050,000

Antes de continuar, obtengamos una forma más simple de hacer los cálculos:

$$1'000,000 + 0.05\,(1'000,000) = (1 + 0.05)\,(1'000,000) =$$
$$= 1.05\,(1'000,00) = 1'050,000$$

Así, para calcular la población después de un año, si la tasa de crecimiento es de 5% anual, se multiplica el número de pobladores por 1.05.

1977:

$$1.05\,(1'050,000) = 1'102,500$$

1978:

$$1.05\,(1'102,500) = 1'157,625$$

1979:

$$1.05\,(1'157,625) = 1'215,506.2$$

1980:

$$1.05\,(1'215,506.2) = 1'276,281.5$$

A pesar de que para los dos últimos años el resultado fue un número no entero y de que no podemos tener un número no entero de personas, para efectuar los cálculos usaremos estos números.

Aunque solamente tengamos los valores correspondientes a una población de 1'000,000 habitantes en 1975, empecemos a construir la tabla para tener mayor claridad, en ella no consignamos la parte decimal de los números correspondientes a 1979 y 1980.

1975	1976	1977	1978	1979	1980
1,000,000	1,050,000	1,102,500	1,157,625	1,215,506	1,276,281

Tabla 7.

Añadimos un renglón en la tabla, aquél que corresponde al valor 1'500,000 en 1980.

1975	1976	1977	1978	1979	1980
1,000,000	1,050,000	1,102,500	1,157,625	1,215,506	1,276,281
?	?	?	?	?	1,500,000

Tabla 8

Los valores del segundo renglón son proporcionales a los del primer renglón (¿por qué?), por lo tanto, si calculamos el coeficiente de proporcionalidad calcularemos los valores que hacen falta.

$$\frac{1{,}500{,}000}{1{,}276{,}281} = 1.175$$

La constante de proporcionalidad es entonces **1.175.**

Para conocer cuántos habitantes había en 1975, multiplicamos 1,000,000 por 1.175:

$$\mathbf{1.175\ (1{,}000{,}000) = 1{,}175{,}000}$$

Si solamente quisiéramos saber cuantos habitantes había en 1975, ya hubiéramo terminado; pero como también queremos saber cuándo fué el último año que hub menos de 1,250,000; efectuamos entonces los demás cálculos:

$$\mathbf{1.175\ (1{,}050{,}000) = 1{,}233{,}750}$$
$$\mathbf{1.175\ (1{,}102{,}500) = 1{,}295{,}437}$$

En este momento ya podemos responder la segunda pregunta, por lo que no necesitamos seguir calculando. El último año que hubo menos de 1'250,000 habitantes fue en 1976, no fue necesario por tanto, terminar de llenar la tabla.

1975	1976	1977	1978	1979	1980
1,000,000	1,050,000	1,102,500	1,157,625	1,215,506	1,276,281
1,175,000	1,233,750	1,295,437	?	?	1,500,000

Tabla 9.

En la resolución del problema anterior, viste que efectivamente el uso de la proporcionalidad nos ahorró bastante trabajo, de hecho solamente hubo que ensayar con un valor y después hicimos uso de ella, para calcular directamente, por medio de la constante de proporcionalidad, los valores que buscábamos.

Puedes ahora preguntarte, *¿podemos aplicar la proporcionalidad para resolver todos los problemas que hemos visto?,* y si no es así, *¿cómo podremos saber cuándo hacer uso de ella?.*

Observe el siguiente ejemplo:

EJEMPLO

Se tiene un terreno cuadrado cuyos lados miden 30 metros, se tiene bardeada una porción rectangular de 20 metros de largo por 8 de ancho. Si se quiere ampliar el área bardeada a 364 m^2 y aumentar la misma longitud en su largo como en su ancho, ¿qué longitud se debe ampliar la barda en cada lado?

LARGO	ANCHO	ÁREA
→ 20	8	160
21	9	189
22	10	220
25	13	325
→ 26	14	364
30	18	540

Para ello calculamos los cocientes $\Rightarrow$ $\frac{20}{26}, \frac{8}{14}, \frac{160}{364}$

$$\frac{20}{26} = 0.769$$

$$\frac{8}{14} = 0.571$$

$$\frac{160}{364} = 0.439$$

Ya que los cocientes no son iguales, los renglones no son proporcionales y no podemos, por tanto, resolver este problema usando la proporcionalidad.

Observa que el método de razones y proporciones, únicamente lo podemos aplicar cuando se determina el coeficiente de proporcionalidad. ¿Te pareció más sencillo este método que el de ensayo y error?. ¿Cuál es la razón?.

2.1.3 DIAGRAMAS DE OPERACIONES

Hasta ahora hemos visto como resolver aritméticamente ciertos problemas con el método de ensayo y error. Nos apoyamos en ocasiones, cuando el problema lo permite, en la proporcionalidad. Es importante insistir en que estos problemas tienen una importante diferencia, con aquellos que estábamos acostumbrados a resolver. Por lo general, siempre teníamos que calcular o encontrar una cierta cantidad y era claro qué operaciones había que realizar con los datos numéricos del problema.

Por ejemplo: si nos encontrábamos de viaje en alguna ciudad de los Estados Unidos de Norteamérica y el costo de una comida fue de 23 dólares, es claro que, para saber cual fue su costo en pesos mexicanos, bastaría con multiplicar 23 por el número de pesos que cuesta comparar un dólar (lo que usualmente se conoce como *el tipo de cambio peso-dólar*).

Esto es, operábamos con cantidades conocidas y nos interesábamos por el resultado de operar con ellas. En los problemas que hemos planteado en este fascículo, conocemos los resultados de ciertas operaciones y lo que nos interesa es saber la cantidad de que partimos.

Por ello en los problemas que ahora queremos resolver, no es tan claro qué operaciones aritméticas debemos realizar con los datos numéricos del problema, para encontrar la cantidad de que partimos. De hecho, como se vio, tuvimos que hacer "algo más" que operaciones aritméticas. Este "algo" adicional fue la implementación de un método para resolverlos. Este método, como ya hemos dicho, se conoce usualmente como el método de prueba y error o ensayo y error. como te podrás dar cuenta, el nombre del método es muy descriptivo, máxime si recuerdas que para encontrar la cantidad deseada, probábamos con algunos valores hasta que encontrábamos aquel que satisficiera las condiciones del problema, es decir, hasta que ya no hubiera error. Aún cuando en algunos casos este método puede resultar seguro, en algunos otros puede ser inútil o cuando menos excesivamente laborioso.

El siguiente es un ejemplo donde se determinarán las operaciones que hay que realizar con los datos numéricos, para llegar a la cantidad de que partimos, no es tan sencillo y resolverlo por el método de ensayo y error es tardado y, como ya se ha dicho, laborioso.

EJEMPLO

Pedro pensó un número, que multiplicó por 2; al resultado le sumó 5 para después dividir por 5, restar 1, multiplicar por 8 y, finalmente, sumar 7. El resultado que obtuvo fue el número 39. ¿Cuál es el número que pensó Pedro?

Resuelve el problema por el método de ensayo y error. Una vez que lo hayas hecho, lee el método de solución que te proponemos.

Para resolver este problema pensaremos lo siguiente: ¿podemos saber cuál es el número que obtuvo Pedro antes de realizar la última operación (sumar 7) y cuyo resultado le dio 39?. Es decir, ¿cuál es el número que al sumarle 7 da 39?. No cuesta mucho trabajo convencerse de que, para obtener este número, basta con que a 39 le restemos 7 (lo inverso de sumar 7). Así pues, como 39 - 7 = 32, ya sabemos que el resultado que obtuvo Pedro, después de haber realizado las primeras cinco operaciones fue 32.

Ahora nos preguntaremos: ¿cuál es el número que Pedro obtuvo antes de multiplicar por 8 y cuyo resultado le dio 32?. Es decir, ¿cuál es el número que multiplicado por 8 da 32?. Como en el caso anterior, es fácil darse cuenta que, para encontrar este número, basta con que a 32 lo dividamos por 8 (lo inverso de multiplicar por 8) de modo que, como 32/8 = 4, llegamos a la conclusión de que 4 fue el resultado que Pedro obtuvo después de realizar las primeras cuatro operaciones con el número que pensó.

Seguramente a estas alturas, ya te diste cuenta del método que empleamos para encontrar cada uno de los números que Pedro obtuvo conforme realizó las operaciones, y de este modo llegar al número inicial. De hecho, nuestro problema queda ilustrado gráficamente de la siguiente manera:

$$\boxed{?} \xrightarrow{\times 2} \boxed{?} \xrightarrow{+5} \boxed{?} \xrightarrow{\div 5} \boxed{?} \xrightarrow{-1} \boxed{?} \xrightarrow{\times 8} \boxed{?} \xrightarrow{+7} \boxed{39}$$

y el método que usamos para resolverlo es de la siguiente forma:

$$\boxed{10} \xrightarrow{\div 2} \boxed{20} \xrightarrow{\boxed{-5}} \boxed{25} \xrightarrow{\boxed{\times 5}} \boxed{5} \xrightarrow{\boxed{+1}} \boxed{4} \xrightarrow{\boxed{\div 8}} \boxed{32} \xrightarrow{\boxed{-7}} \boxed{39}$$

Como podrás observar, de esta manera es fácil determinar cuales son las operaciones, que hay que realizar con los datos numéricos del problema. A los diagramas construidos les llamaremos *diagramas de operaciones.*

Compara ahora la manera en que solucionamos el problema por medio de los diagramas de operaciones, con la manera en que lo hiciste con el método de ensayo y error. Podrás darte cuenta, en primer lugar, de que el número de operaciones que tuviste que realizar fue bastante menor, a menos que el primer número que hayas escogido para probar haya sido 10, lo cual sería realmente una casualidad.

En segundo lugar, verás que la manera de resolver el problema se aplica a cualquier otro número, para el cual el problema tenga solución. Así, si se tiene el número 55 como resultado de efectuar las operaciones descritas con un número, que se pensó al aplicar el método del diagrama de operaciones se obtiene:

$$\boxed{15} \xrightarrow{\div 2} \boxed{30} \xrightarrow{\boxed{-5}} \boxed{35} \xrightarrow{\boxed{\times 5}} \boxed{7} \xrightarrow{\boxed{+1}} \boxed{6} \xrightarrow{\boxed{\div 8}} \boxed{48} \xrightarrow{\boxed{-7}} \boxed{55}$$

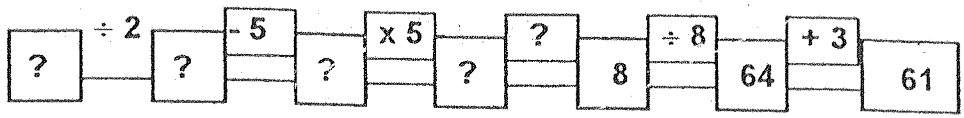
Desafortunadamente, con el método anterior no es posible resolver una buena variedad de los problemas, que enfrentamos. Más aún, si hacemos una pequeña modificación al ejemplo te darás cuenta que el método que empleamos ya no funciona.

EJEMPLOS

Pedro pensó un número al cuál multiplicó por 2, al resultado le sumó 5, para después dividir por 5, sumar el número que pensó, multiplicar por 8 y finalmente restar 3 y obtendrás como resultado el número 61. ¿Cuál es el número que pensó Pedro?

Si aplicamos el método empleado en el problema anterior, llegamos a un punto en el cual ya no podemos avanzar.

Esto se ve más claramente en el siguiente diagrama:



El método de diagramas de operaciones únicamente requiere saber cuál es la operación inversa que corresponde ¿Crees que exista una forma más sencilla de resolver este tipo de problemas? ¿Cómo te imaginas que podrías plantearlos?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

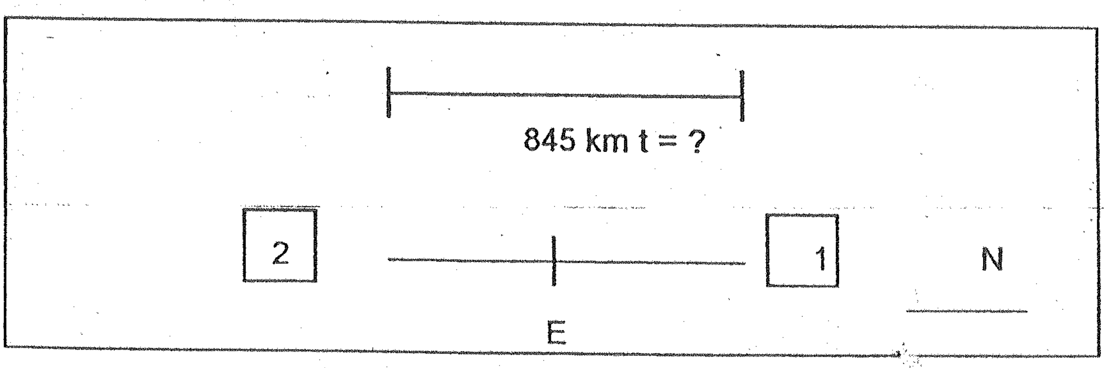
Para que ejercites los tres métodos que analizamos en este tema, resuelve los siguientes problemas por el método que se indica.

POR ENSAYO Y ERROR:

1) Dos trenes salen de la estación al mismo tiempo, uno hacia el norte y otro hacia el sur ¿cuánto tiempo tardan en distanciarse 845 km entre ambos, si la velocidad del primero es de 100 km/h, y el segundo va a 95 km/h?

Respuesta: ____________________

Para resolver este problema, deberás aumentar las horas. Si con esto no llegas al resultado exacto, transforma las horas a minutos. Para dar la respuesta, vuelve a transformar los minutos a horas.



2) ¿Qué número habrá que sumar a 25 y 30, para que el producto de los resultados sea 1974?

Respuesta: ______________

Recuerda que cuando hablamos de producto, nos referimos al resultado de una multiplicación.

3) Se invierten $1,000.00 en el banco a un interés de 10% anual ¿cuántos años tendrán que pasar para obtener más de $ 5,000.00 si se reinvierten los intereses?

Recuerda que para sumarle el 10% a una cantidad se multiplica la cantidad por 1.1.

POR RAZONES Y PROPORCIONES

4) Una compañía arrendadora de automóviles cobra por la renta de un auto $120.00 diarios, más $2.00 por kilómetro recorrido; otra compañía cobra por la renta del mismo auto $80.00 diarios, más $2.50 por kilómetro recorrido ¿cuántos kilómetros se deben recorrer diariamente para que la renta del automóvil sea la misma en las dos compañías?

Respuesta: ________________

Para solucionar este problema, primero aplica el método de ensayo y error para dos valores; después encuentra el coeficiente de proporcionalidad; con éste, calcula el valor que se solicita.

Si no lo puedes solucionar por este método, escribe en media cuartilla las razones.

5) Dos trenes salen de la estación al mismo tiempo, uno hacia el norte y otro hacia el sur ¿cuánto tiempo tardan en distanciarse 768 km entre ambos, si la velocidad del primero es de 80 km/h y del segundo de 90 km/h?

Inicia la resolución de este problema por ensayo y error; después obtén el coeficiente de proporcionalidad y calcula el valor que se solicita.

Si no puedes resolverlo por este método explica las razones en media cuartilla.

POR DIAGRAMAS DE OPERACIONES

6) Juan abrió una cuenta de cheques con una cierta cantidad el día primero de enero. El día 5 hizo un depósito de $200.00; el 10 extendió un cheque por una cantidad igual a la mitad de su saldo del día 5; el día 15 hizo un depósito por una cantidad que le triplicó su saldo del día 10 y el día 25 hizo un retiro de $ 50.00. ¿Cuál es la cantidad inicial con la que abrió Juan su cuenta de cheques, si el banco le informa que a fin de mes tiene un saldo de $400.00?

Respuesta: ______________________

Lee con cuidado el problema, al tiempo que haces el diagrama original una vez que lo tengas terminado, realiza las operaciones.

7) José compra un cierto producto cada año. En 1988 le costó una cierta cantidad. Para 1989 lo compró $50.00 más barato; en 1990 era cuatro veces más caro que en 1989; en 1991, en una oferta, lo compró a mitad de precio del año anterior y en 1992 compró el producto en $400.00, lo que representa $100.00 más que en 1991. ¿Cuál fue el precio del producto en 1989?

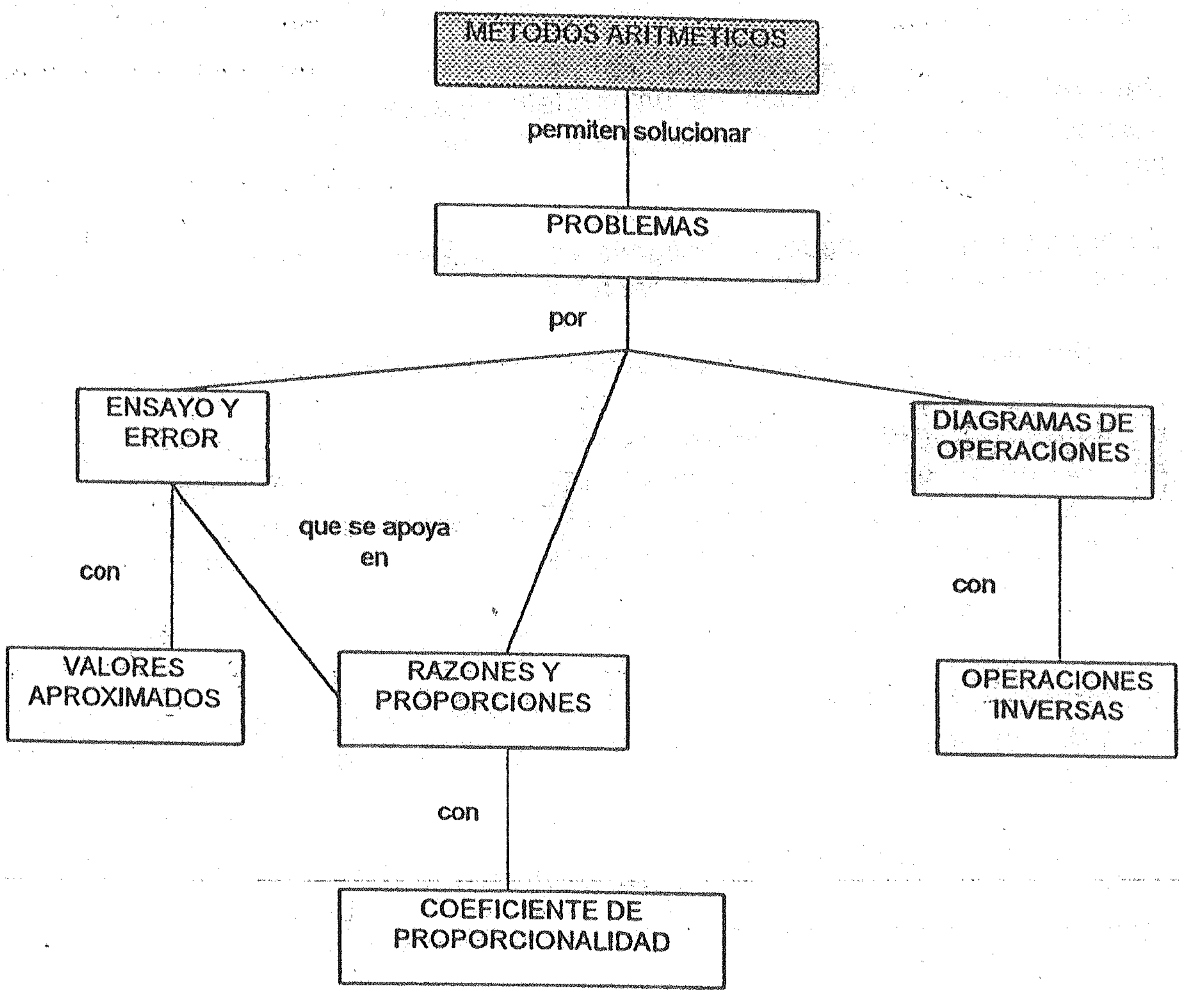
Respuesta: ______________________

Lee con cuidado el problema, no te confundas con los años, el procedimiento es exactamente el mismo que en el caso anterior.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí hemos revisado tres métodos aritméticos que nos sirven para solucionar problemas donde nos hace falta un valor. Las operaciones que aplicamos en la mayoría de los casos, fueron las básicas: suma, resta, multiplicación y división, también aplicamos el por ciento, en los problemas que solucionamos por razones y proporciones.

En el siguiente mapa conceptual podrás observar la síntesis de este tema:



También incluimos que cuando no contamos con dos datos en un problema no podemos solucionarlos con los métodos aritméticos. Este tipo de problemas se resuelven con los modelos algebraicos que abordaremos en el siguiente tema, con la finalidad de reconocer su lenguaje.

2.2 MODELOS ALGEBRAICOS

Los modelos algebraicos son una herramienta que nos ayuda a solucionar problemas cotidianos, cuando no contamos con dos datos o más. Para construir este tipo de modelos, debemos traducir el lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico, para lo cual representamos las incógnitas con una literal; formamos una expresión, y hacemos uso de la igualdad "=" para así establecer la ecuación a resolver.

EJEMPLOS

Queremos saber qué número le tenemos que sumar a 10 y restar al 18 para obtener la misma cantidad.

Para iniciar la construcción de un modelo algebraico, debemos precisar el valor (o valores) que deseamos encontrar, sin recurrir al ensayo y error; a éste valor le llamaremos incógnita.

En el problema planteado, la incógnita es el número que le tenemos que sumar a 10 y restar a 18 para obtener la misma cantidad.

Posteriormente, es necesario representar la incógnita con una letra o literal x.

Al sustituir el valor que deseamos encontrar por la literal "x", en el ejemplo que estamos analizando, formaríamos la expresión 10 + x, así como 18 - x. Si decimos que los resultados de estas expresiones deben ser iguales entonces podemos representarlas con la siguiente expresión:

$$10 + x = 18 - x$$

Encontrar el número buscado, se reduce entonces, a encontrar un número tal, que al ser sustituido por la literal x, en la expresión anterior, haga que en ambos lados se obtenga el mismo valor.

No ha sido una casualidad que usemos la palabra expresión para referirnos a 10 + x, 18 - x, así como a 10 + x = 18 - x. El concepto expresión está relacionado al lenguaje o lengua. Es muy común usar como *sinónimos expresión y oración.*

En el siguiente cuadro podemos ver como las expresiones x; 10 + x; 18 - x, así como 10 + x = 18 - x son semejantes a una oración, a través de las cuales comunicamos una idea concreta.

LENGUAJE COMÚN	EXPRESIÓN
Queremos saber qué número	x
le tenemos que sumar a 10	10 + x
y restar a 18	18 - x
para obtener la misma cantidad	10 + x = 18 - x

Tabla 10. En la columna izquierda, aparecen oraciones o ideas en el lenguaje cotidiano. En la columna derecha, puedes observar una forma de representar esas ideas al substituir el valor que queremos encontrar por "x".

Las expresiones que aparecen en la columna de la derecha de la tabla 10, son oraciones de un lenguaje cotidiano, el cual es traducido a un lenguaje algebraico. Ahora bien cuando dos expresiones involucran el signo igual (=), son llamadas igualdades ó ecuaciones. Las expresiones que aparecen a cada lado del signo =, se llaman miembros de la ecuación.

Es necesario aclarar que en este capítulo, únicamente estamos analizando como se construyen los modelos algebraicos, por lo que no abordaremos el procedimiento para resolverlos. Dichos procedimiento lo estudiarás en los siguientes fascículos de esta asignatura.

Con la única finalidad de que compruebes que la ecuación tiene el mismo valor en ambos miembros, te proporcionamos el valor de "x", el cual es 4.

Entonces, sustituyendo las incógnitas por el valor de 4, encontramos que dicha igualdad se cumple:

$$10 + 4 = 18 - 4$$

$$\boxed{14 = 14}$$

EJEMPLO

Actualmente, mi padre tiene 46 años y yo tengo 17. ¿Dentro de cuántos años, mi edad será exactamente la mitad de la edad que tendrá mi padre? Es claro que actualmente mi edad (17 años), es menor que la mitad de la de mi padre (23 años).

En este ejemplo, es importante destacar la dificultad para determinar cuáles son las operaciones aritméticas que se realizarán con los datos numéricos, para encontrar el valor que requerimos (el número de años que tienen que pasar para que, en ese momento, mi edad sea la mitad de la de mi padre).

Independientemente de que este ejemplo parezca más complicado que el anterior, procederemos de la misma forma. Primero determinemos nuestra incógnita, que en este caso es el número de años que tiene que transcurrir para que mi edad sea la mitad de la de mi padre.

Ahora sustituyamos la incógnita, por la literal x, para así formar las expresiones que solucionarán este problema. Observa la tabla 11, en la que aparece la traducción del problema del lenguaje común, al lenguaje algebraico:

LENGUAJE COMÚN	EXPRESIÓN
Edad actual de mi padre	46
Mi edad actual	17
Después de ciertos años	x
La edad de mi padre será	46 + x
Yo tendré	17 + x
De tal forma que la mitad de la de mi padre.	$\frac{46+x}{2}$
Será igual a la mía	$17+x=\frac{46+x}{2}$

Tabla 11. Con esta tabla hemos traducido el problema del lenguaje común al lenguaje algebraico, hasta obtener la ecuación que le dará solución.

Así, las expresiones algebraicas que obtenemos son: $x, 46+x, \frac{46+x}{2}$, así como $17+x=\frac{46+x}{2}$.

Y a su vez, esta última es la ecuación que dará respuesta a nuestro problema.

Igual que en el ejemplo anterior , te daremos el valor de "x" para que compruebes que en ambos miembros de la ecuación se obtiene la misma cantidad, cumpliéndose de esta forma la igualdad.

El valor de "x" es 12, y al sustituirlo en la ecuación encontramos que:

$$17+12=\frac{46+12}{2}$$

$$29=\frac{58}{2}$$

$$29=29$$

Lo cual quiere decir que dentro de 12 años mi edad (29 años) será exactamente la mitad de la de mi padre (58 años).

Antes de dar otros ejemplos y como una prueba de la utilidad y amplia aplicabilidad de la herramienta que hasta aquí hemos desarrollado, haremos uso de ella para resolver el ejemplo.

EJEMPLO

Pedro pensó un número al cual multiplicó por 2, a cuyo resultado le sumó 5, para después dividir por 5, sumar el número que pensó, multiplicar por 8, finalmente restar 3 y obtener como resultado el número 61. ¿Cuál es el número que pensó Pedro?

Como dijimos en el problema anterior, el primer paso consiste en identificar las cantidades que deseamos conocer. En este problema, es claro que esta cantidad es el número. Al hacer uso de esta letra, el resto de los elementos del problema quedarían expresados de la siguiente manera:

Pedro pensó un número x al cuál multiplicó por dos (2x), a cuyo resultado le sumó cinco (2x + 5), para después dividir por cinco $\left(\frac{2x+5}{5}\right)$, sumar el número que penso $\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)$, multiplicar por ocho $8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)$, y finalmente restar tres $8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3$, y obtenemos como resultado el número 61; $8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3=61$.
Todo esto queda resumido en la tabla 12.

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Pedro pensó un número	x
el cual multiplicó por 2	$2x$
a cuyo resultado le sumó 5	$2x+5$
para después dividir por 5	$\frac{2x+5}{5}$
sumar el número que pensó	$\frac{2x+5}{5}+x$
multiplicar por 8	$8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)$
para finalmente restar 3	$8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3$
obteniendo el número 61	$8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3=61$

Tabla 12. En esta aparece la traducción del problema del lenguaje común al algebraico.

Así la ecuación:

$$8\left(\frac{2x+5}{5}+x\right)-3=61$$

representa el problema planteado en lenguaje algebraico.

A partir de aquí empezaremos a realizar operaciones, de tal forma que obtengamos diferentes ecuaciones equivalentes, hasta lograr despejar la incógnita x. Por ahora ya no haremos este trabajo. Sin embargo, te podrás dar cuenta que tomando x = 5 en la ecuación anterior, obtienes la igualdad 61 = 61. Es decir, el número que pensó Pedro fue 5.

EJEMPLO

Un caballo y un mulo caminaban juntos y llevaban pesados sacos sobre sus lomos. Lamentábase el jamelgo de su enojosa carga, a lo que el mulo le dijo: "¿De qué te quejas?. Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía". ¿Cuántos sacos llevaba el caballo y cuántos el mulo?

En este problema necesitamos dos datos: el número de sacos que lleva el caballo y el número de sacos que lleva el mulo. Para diferenciarlos, debemos asignarles literales que no sean iguales. Representemos con la letra "x" el número de sacos que lleva el caballo y con la letra "y" el número de sacos que lleva el mulo.

Expresemos ahora el resto de los elementos del problema haciendo uso de estas letras.

El mulo dice: "Si yo te tomara un saco", de modo que el caballo quedaría ahora con x - 1 sacos, "mi carga", que ahora sería igual a y + 1 sacos, "sería el doble que la tuya", es decir, tendríamos la ecuación:

$$\mathbf{2(x-1)=y+1}$$

y el mulo continua diciendo: "Y si yo te doy un saco", de modo que su carga sería ahora de y - 1 sacos, "tu carga", que ahora sería de x + 1 sacos, "se igualará a la mía", es decir, tendríamos la ecuación:

$$\mathbf{y-1=x+1}$$

Lo hecho anteriormente quedaría resumido en el siguiente cuadro:

LENGUAJE COMÚN	LENGUAJE ALGEBRAICO
Si de tu carga	x
tomara un saco	x - 1
y a mi carga	y
se le agregara	y + 1
mi carga sería el doble de la tuya	y + 1 = 2 (x - 1)
y si te doy un saco	y - 1
tu carga	x + 1
se igualará a la mía	y-1 = x+1

Tabla 13 Observa que para solucionar este problema debemos encontrar el valor de "x" así como el de "y". Además que se forman dos ecuaciones.

Como te habrás dado cuenta, este problema tiene algunas diferencias sustanciales con los anteriores. En este caso el número de cantidades a determinar son dos y por lo tanto hay dos incógnitas. En segundo término, el problema queda modelado por dos ecuaciones en las que aparecen ambas incógnitas, a saber:

$$y + 1 = 2(x - 1) \qquad y - 1 = x + 1$$

En este caso decimos que para encontrar la solución del problema, tenemos que resolver un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas. Observa que en este caso, la solución debe estar dada por un par de números que, al ser sustituidos por *x* y *y* en estas ecuaciones, en ambas debemos de obtener una igualdad.

De hecho, puedes verificar fácilmente que, al tomar **y = 7 y x = 5** obtienes estas igualdades.

El siguiente ejemplo nos permitirá dar una clasificación más precisa de las ecuaciones.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

A un terreno de forma cuadrada se le quitó una franja de 3 km de ancho de su costado oriental y una franja de 4 km de ancho de su costado norte, con lo cual su superficie quedó reducida a la mitad. ¿De qué dimensiones era el terreno original?

Como en los dos problemas anteriores, lo primero que tenemos que hacer es determinar cuál es o cuáles son las cantidades que hay que encontrar. Ya que el problema pide determinar las dimensiones de un terreno de forma cuadrada, basta con encontrar cuánto mide uno de sus lados (el resto de los lados medirán lo mismo). Digamos que la letra x representa la longitud de cada lado del cuadrado. A fin de poder expresar el resto de los elementos del problema en términos de la incógnita x, nos auxiliaremos de un dibujo que nos represente la situación descrita en el problema (este es un recurso muy útil siempre que el problema lo permita).

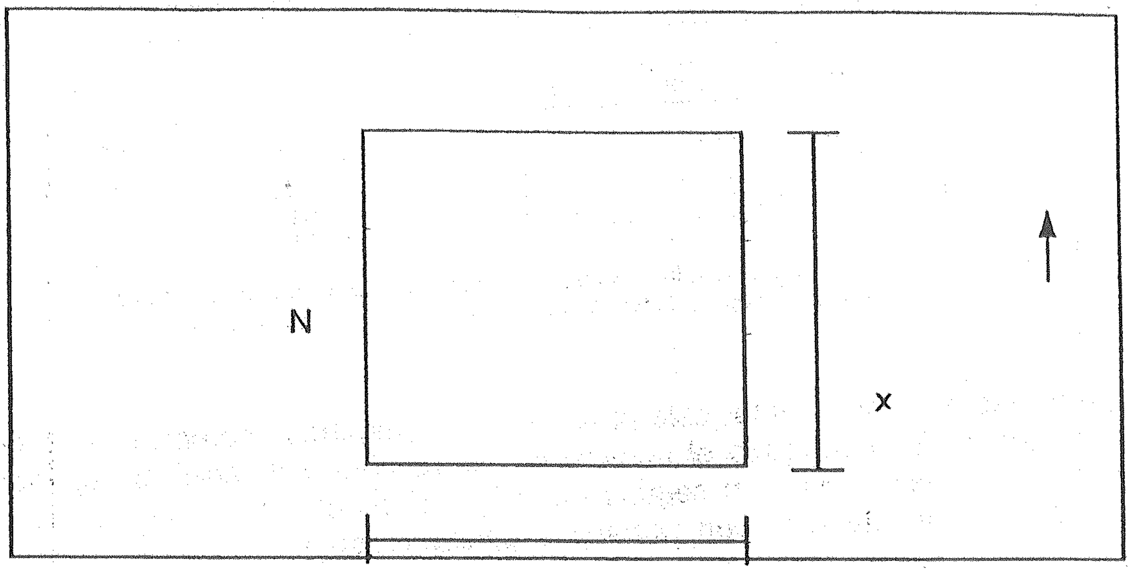


Figura 3. El terreno completo.

El cuadrado de arriba representa nuestro terreno. A la superficie original del terreno xx, se le quita una franja de 3 km de ancho en su parte oriental y una franja de 4 km de ancho en su costado norte.

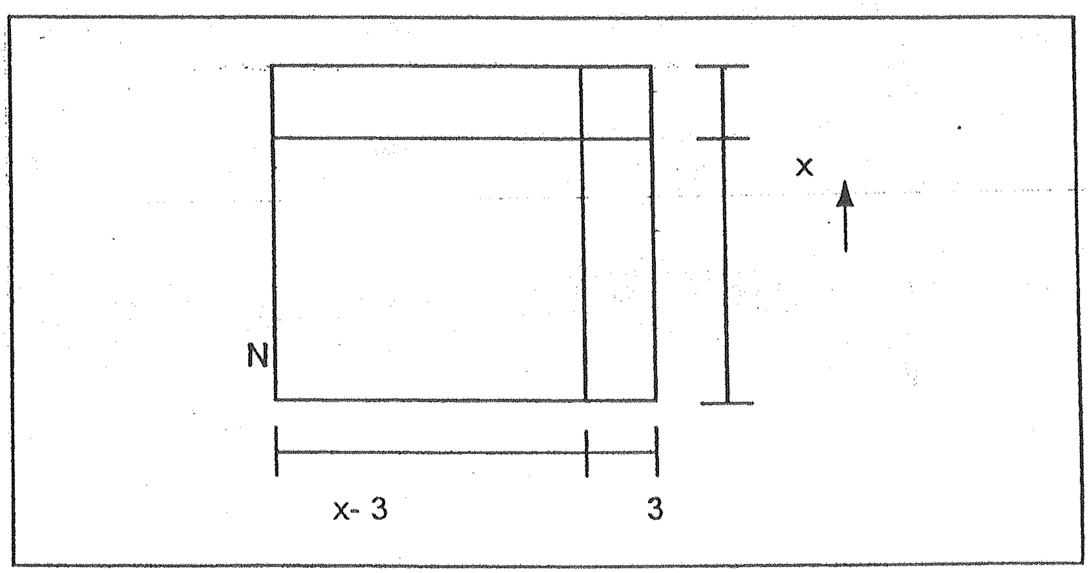


Figura 4. El terreno señalando los 3 km y 4 km que se le quitará del lado oriente y norte.

Por lo que la superficie del nuevo terreno, ahora representada por (x - 3) (x - 4) queda igual a la mitad de la superficie original, es decir.

$$(x-3)(x-4) = \frac{(x)(x)}{2}$$

Al desarrollar la expresión del primer miembro de la ecuación obtendríamos el siguiente modelo algebraico.

$$x^2 - 7x + 12 = \frac{x^2}{2}$$

Escrita la ecuación de esta manera, es fácil distinguir sus semejanzas y sus diferencias con la ecuación del problema de las edades. Esta ecuación y la de ese problema tienen en común la propiedad de que en ambas aparece una sola incógnita. Sin embargo, en esta última ecuación la incógnita aparece elevada al cuadrado, mientras que en la primera la incógnita aparece elevada a la potencia 1. Esta diferencia hace que las ecuaciones reciban nombres distintos. en el caso de la ecuación del problema de las edades decimos, que tenemos una ecuación de primer grado (dado que la incógnita sólo aparece elevada a la 1 con una incógnita, mientras que en el problema del terreno cuadrado se dice que la acuación es de segundo grado (dado que la incógnita aparece elevada al cuadrado) con una incógnita.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Traduce al lenguaje algebraico los siguientes problemas:

1) Una compañía arrendadora de automóviles cobra por la renta de un auto \$120.00 diarios, más \$2.00 por kilómetro recorrido. Otra compañía cobra por la renta del mismo auto \$80.00 diarios más \$2.50 pesos por kilómetro recorrido. ¿Cuántos kilómetros se deben recorrer diariamente para que la renta del automóvil sea la misma en las dos compañías?

   Modelo Algebraico: ____________________

2) La inflación en los últimos tres años fue de 35%, 20% y 13% respectivamente. ¿Cuál era el precio de un artículo hace tres años si ahora cuesta \$338.66?. Si suponemos que su precio ha crecido al mismo ritmo que la inflación.

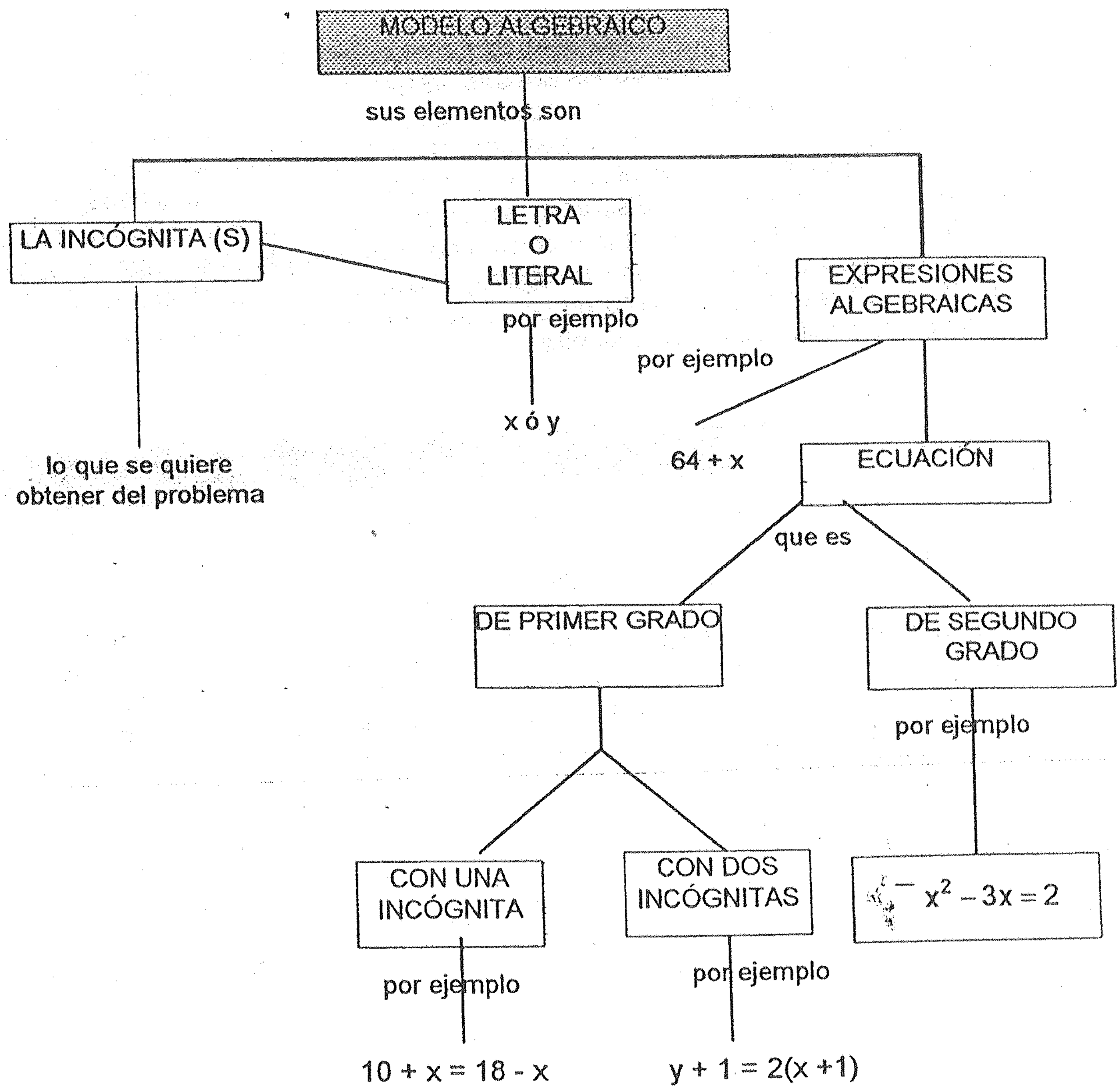
   Modelo Algebraico: ____________________

Recuerda que nuestro objetivo es traducir del lenguaje común al algebraico, por lo que no es necesario que llegues a la solución a través del modelo algebraico.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

En este tema aprendiste a traducir sin problema del lenguaje común al lenguaje algebraico, para formar modelos algebraicos; que no son más que una forma de representar los problemas que queremos resolver.

En el siguiente mapa conceptual aparecen los conceptos más importantes del tema y sus relaciones.



RECAPITULACIÓN

En este capítulo te presentamos algunas ideas para resolver un tipo de problemas, aquéllos en los que conocemos los resultados de cierto tipo de operaciones, además nos interesa conocer la cantidad de que partimos.

Usamos para su resolución el método de ensayo y error, el cual por lo general involucra procedimientos largos y laboriosos, y nos hemos apoyado, cuando el problema lo admitió, en el concepto de proporcionalidad, para hacer más eficientes estos procedimientos.

Vimos también un primer modelo de algunos de ellos los diagramas de operaciones y establecimos así procedimientos más generales que los de ensayo y error.

Finalmente propusimos el uso del lenguaje algebraico, para establecer modelos algebraicos generales de estas situaciones, que nos permitirán establecer procedimientos también generales para la resolución de estos problemas.

Esto es, buscamos a través de la utilización de los métodos descritos para la resolución de estos problemas, los más generales y eficientes. Hasta este momento hemos propuesto el lenguaje algebraico para establecerlos, por medio del uso de modelos algebraicos, en particular, del establecimiento de ecuaciones.

ACTIVIDADES INTEGRALES

Con la finalidad de que compares los procedimientos para solucionar problemas para los diferentes métodos que hemos analizado en este capítulo resuelve los siguientes problemas:

1.La suma de 3 números consecutivos es 186.

a) Determinar esos 3 números aplicando el método de ensayo y error.

b) Interpreta el enunciado en un modelo algebraico.

2.La señora Arzate invierte en el banco $4,500.00 y le da un rendimiento de $720.00 mensuales.

¿Cuánto deberá invertir para ganar $740.00; $780.00 y $880.00

a) Resuelve el problema mediante el método de ensayo y error.

b) Resuelve el problema aplicando razones y proporciones

c) Interpreta el problema en un modelo algebraico.

3.Una industria textil que fabrica hilos de algodón, tiene un gasto semanal de mano de obra para la elaboración de su producto de $15,820.00

En el departamento de batientes se gasta una cierta cantidad. En el departamento de cardas gasta $280.00 más que en el de batientes. En el departamento de estiradores gasta $1,680.00 menos que en el segundo departamento. En el de troziles gasta $560.00 más que en el departamento de estiradores y en el departamento de coneras se gasta una cantidad igual a la de cardas.

a) Intenta resolver el problema aplicando diagramas de operaciones y si no lo lograste, indica por qué.

b) Interpreta el problema mediante el modelo algebraico.

AUTOEVALUACIÓN

A fin de que compruebes que los procedimientos que aplicaste para resolver los problemas de las actividades integrales, te presentamos a continuación los resultados a los que debiste llegar.

1.La suma de 3 números consecutivos es 186.

a) El número inicial es 61; ya que 61+62+63=186

b) El modelo algebraico es:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 186$$

2.La señora Arzate invierte en el banco \$4,500.00 y le da un rendimiento de \$720.00 mensuales.

a) Debiste buscar el tanto por ciento de intereses que recibe la señora Arzate, hasta encontrar 16% y posteriormente buscar las cantidades que al obtenerles el 16% dé como resultado, los valores planteados

b) En este caso no es necesario determinar el % de interés de 4500.00, ya que podemos obtener las cantidades desconocidas obteniendo el coeficiente de proporcionalidad de la siguiente manera.

4500 ————	720
1 ————	740
2 ————	780
3 ————	880

Paso 1: $\dfrac{740}{720} = 1.0277 = \dfrac{?}{4500} = 4624.6 \approx \mathbf{4625}$

Paso 2: $\dfrac{780}{720} = 1.0833 = \dfrac{?}{4500} = 4874.8 \approx \mathbf{4875}$

Paso 3: $\dfrac{880}{720} = 1.2222 = \dfrac{?}{4500} = 5499.9 \approx \mathbf{5500}$

c) Debiste establecer una ecuación para cada valor dado:

$4500\,(x) = 720$

$x_1[x] = 740$

$x_2[x] = 780$

$x_3[x] = 880$

3. Una industria textil que fabrica hilos de algodón, tiene un gasto semanal de mano de obra para la elaboración de su producto de $15820.00

a) $\boxed{?} \xrightarrow{-280} \boxed{C} \xrightarrow{+1680} \boxed{} \xrightarrow{-560} \boxed{} \xrightarrow{?} \boxed{C} \xrightarrow{?} \boxed{15820}$

Este problema nò se puede resolver aplicando este método, ya que existen varias incógnitas que tenemos que obtener.

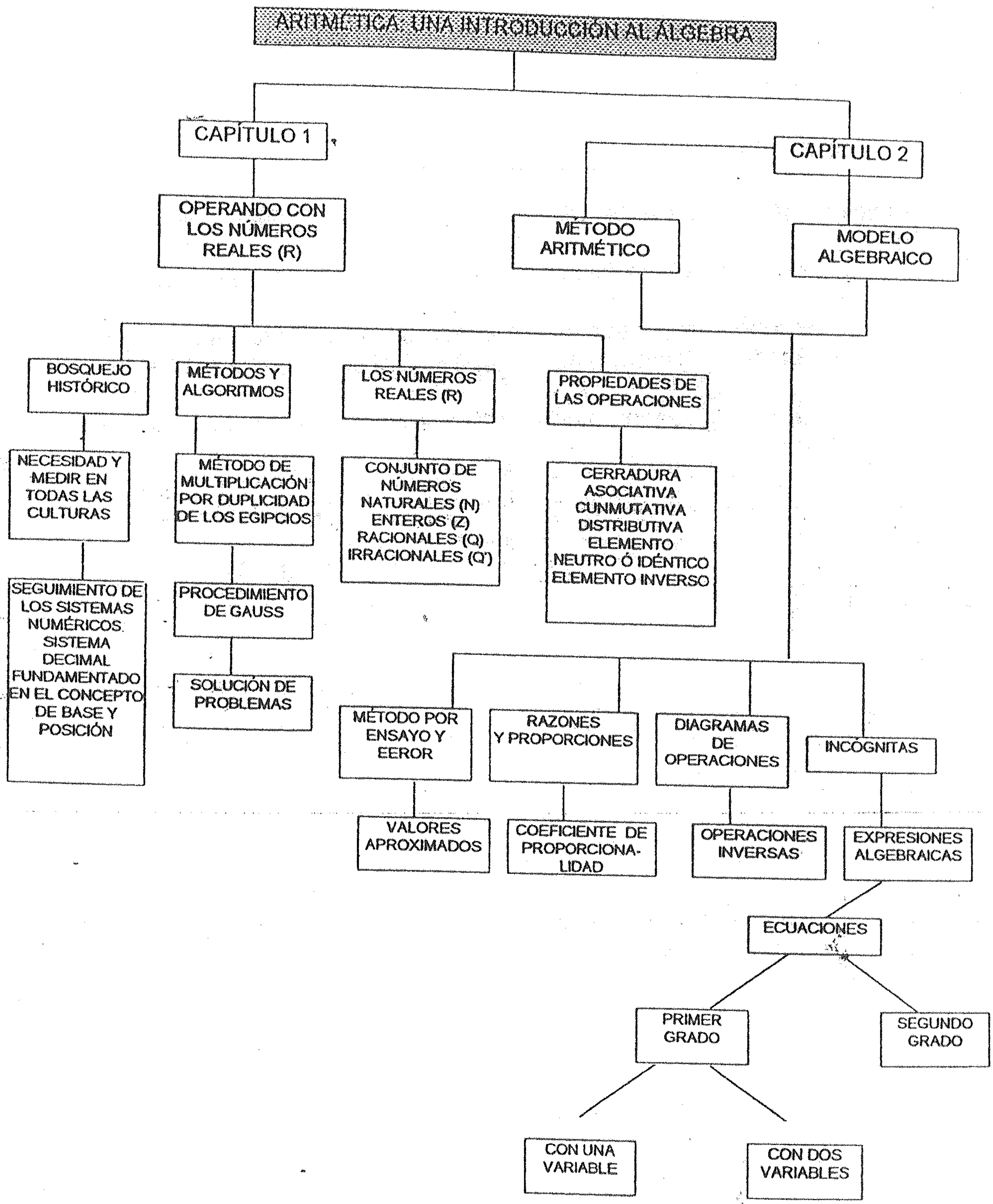
b) $x + (x + 280) + (x + 280 - 1680) + (x + 280 - 1680 + 560) + (x + 280) = 15820$

ó $x + (x + 280) + (x - 1400) + (x - 840) + (x + 280) = 15820$

Resolviendo el modelo, obtenemos como solución $x = 3500$

RECAPITULACIÓN GENERAL

En el siguiente esquema te presentamos una síntesis de los aspectos más relevantes de este fascículo, para que tengas la posibilidad de repasar los temas que ya estudiaste.



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Resuelve los siguientes problemas considerando lo que estudiaste en el fascículo y si tienes dudas, revisa los ejemplos y ejercicios que trabajaste.

1. Escribe en forma desarrollada y en potencias de diez las siguientes cantidades.

   a) 2897 =
   b) 53,915 =
   c) 234,756 =

2. Aplica el método que se te indica para resolver los siguientes ejercicios:

   a) Determina el resultado del producto 98 x 67 por duplicación de los egipcios.

   b) Escribe la expresión y el resultado de la siguiente serie de números aplicando el método de Gauss. $(-40) + (-37) + (-34) + \ldots\ldots + 29 + 32 + 35$

3. Justifica las propiedades que se están aplicando en cada paso de las siguientes operaciones.

   a) $(3 + 2) + (5 + 8) = (2 + 3) + (8 + 5)$
   $= [2 + (3 + 8 + 5)]$
   $= 18$

   b) $(7 + 6) + 3(2 + 8) = (6 + 7) + 3(8 + 2)$
   $= (6 + 7) + (24 + 6)$
   $= (6 + 7 + 24 + 6)$
   $= 43$

4. Realiza las siguientes operaciones con números reales.

   a) $[(5 + 8)2] =$

   b) $[-3 + 5(6 - 1) - 2] - [2 + 5(2)] =$

   c) $-[-(-3) + 4(7 - 9)][5 - (6 + 3)] =$

   d) $[2 - 6(4 - 5)][-2(-1) - 4(-3)][-5 + (4 - 6)] =$

e) $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}-\frac{1}{5}=$

f) $-\frac{1}{3}\left[\frac{6}{5}+\frac{8}{15}-\frac{2}{3}\right]+\frac{3}{7}=$

g) $\left(-\frac{8}{7}\right)\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\right]=$

h) $\left[\frac{3}{8}-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{11}\right]\left[\frac{1}{18}\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right)\right]=$

i) $4+\cfrac{1}{1-\cfrac{3}{8}}=$

j) $3-\cfrac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\cfrac{2}{5}}=$

5. Resuelve los siguientes problemas, aplicando el método de ensayo y error.

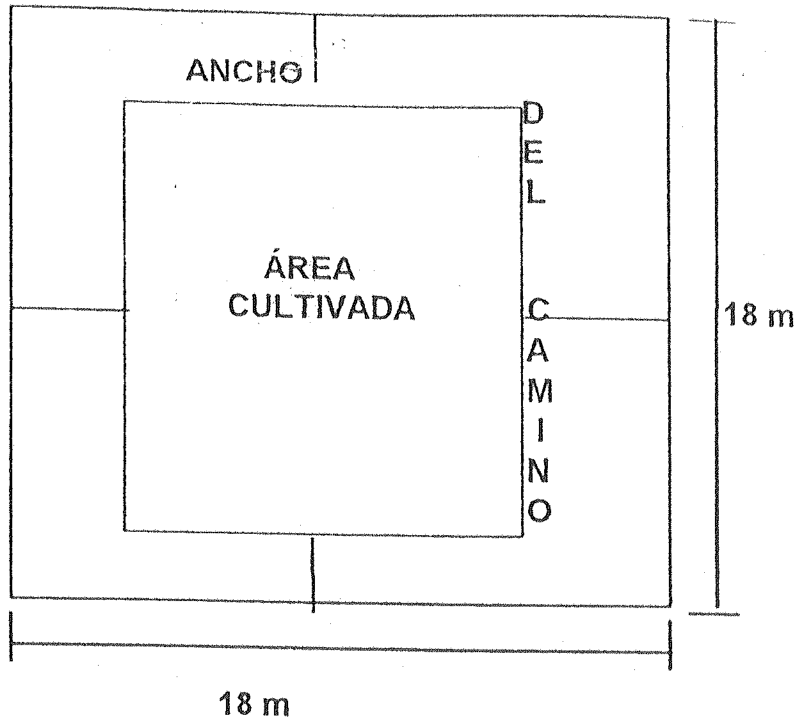
a) ¿Qué número habrá que sumar a 4 y 11 para que el producto de ambos sea el mínimo común múltiplo de 10 y 24?

b) Un individuo dispone de un terreno cuadrado que mide 18 m por lado, en el cual desea cultivar verdura en una parte cuadrada cuya área sea de 132.25 m^2 como lo muestra la figura.

La condición que el quiere es que el área cultivada quede centrada en el terreno, con el fin de que exista un camino alrededor.

¿Cuánto debe medir cada lado de la parte cultivada?

¿Cuánto debe medir el ancho del camino que rodea la parte cultivada?



6. Resuelve los siguientes problemas aplicando el método de proporcionalidad.

   a) El precio de venta de un engrane actualmente es de 27.6 dólares y hace un año costaba 24 dólares.

   Si un rodillo metálico actualmente cuesta 43.7 dólares ¿Cuánto costaba hace un año considerando que el aumento de ambos productos fue en la misma proporción.

   b) Don Arnulfo dejó una herencia de $750,000.00 para sus 4 hijas; a Lulú le tocó la mitad, a Bety la cuarta parte, a Ema la quinta parte y a Cata el resto.

   El hermano de Arnulfo cuando se muera pretende dejar una cierta cantidad de herencia, la cual se deberá repartir a sus cuatro sobrinas en la misma proporción que la herencia de Arnulfo. Si a Bety le pretende dejar $420,000.00 ¿Qué cantidad de herencia dejará su tío?

7. Plantea el modelo algebraico que permite obtener la solución de cada enunciado que a continuación aparece.

   a) Un puente tiene una determinada longitud de largo, la cual está compuesta por tres secciones, la central tiene 100 mts. de largo y cada sección de los extremos representa una sexta parte de la longitud total del puente. Con base a lo anterior, construye el modelo algebraico que representa la longitud del puente.

b) La suma de dos números enteros nos da como resultado 24 y la diferencia del triple de cada uno de ellos nos da el mismo resultado de la suma. ¿Cuáles son esos números?

c) Una habitación rectangular tiene de largo tres veces su anchura y su área mide 432 m^2. Construye el modelo algebraico que representa el valor del área.

AUTOEVALUACIÓN

1. A continuación te presentamos los resultados de los problemas anteriores para que puedas comparar tus resultados, y así conocer los avances de lo que has aprendido.

   a) $2 \times 1000 + 8 \times 100 + 9 \times 10 + 7 \Rightarrow 2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 1$

   b) $5 \times 10{,}000 + 3 \times 1000 + 9 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \Rightarrow 5 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 1$

   c) $2 \times 100{,}000 + 3 \times 10{,}000 + 4 \times 1000 + 7 \times 100 + 5 \times 10 + 6$
   $\Rightarrow 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 1$

2.

a)

$\mapsto$	1	$\mapsto$	98
$\mapsto$	2	$\mapsto$	196
	4		392
	8		784
	16		1568
	32		3136
$\mapsto$	64	$\mapsto$	6272

$98 + 196 + 6272 = 6566$

b) Expresión: (- 5) x 13
Resultado: - 65

3.

a) Conmutativa
Asociativa
Cerradura

b) Conmutativa
Distributiva
Asociativa
Cerradura

4.

a) 26
b) 8
c) - 20
d) - 784
e) 17/10
f) 23/315
g) - 16/105
h) - 241/79200
i) 28/5
j) 27/14

5.

a) (4 + 4) x (11 + 4) = 120 M.C.M de 10 y 24 es 120
El número que habrá que sumar es "4"

b) Lado = 11.5 x 11.5 = 132.25 m^2 Cada lado debe medir 11.5 mts.
Ancho = 3.25 mts.

6.

a)

PRODUCTO	HACE UN AÑO	ACTUAL
ENGRANE	24	27.6
RODILLO	¿ ?	43.7

$$K = \frac{43.7}{27.6} = 1.58\bar{3}$$

Precio del rodillo hace un año = $1.58\bar{3}(24)$

= 38 dólares

b)

PERSONA	HERENCIA	LULÚ	BETY	EMA	CATA
ARNULFO	750,000	375,000	187,500	150,000	37,500
HERMANO	¿ ?		420,000		

$$K = \frac{420,000}{187,500} = 2.24$$

Herencia del hermano = 2.24 (750,000) = $ 1,680,000.00

7.

$\boxed{a)\ x = 100 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x}$

$\boxed{b)\ x + y = 24;\ 3x - 3y = 24}$ ó

$$x + y = 24$$
$$3x - 3y) = 24$$

$\boxed{c)\ (3x)\ (x) = 432}$

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN

Al aplicar los conocimientos que adquiriste realiza las siguientes situaciones, esto te servirá para reforzar tu aprendizaje sobre este tema.

A. Trata de conseguir un ticket de las compras en una tienda de autoservicio, una nota de remisión cuando se compran varios artículos de diferentes especies un recibo de luz o de teléfono o cualquiera de ellos cuando tiene crédito a su favor.

B. Identifica en estos documentos cómo las personas, una máquina registradora o en su caso una computadora utilizan algunas propiedades de los números reales para facilitar las operaciones.

. ¿Las identificaste?

. ¿Te das cuenta de la importancia que tienen estas propiedades?

. ¿Te habrás imaginado que estas propiedades fueran utilizadas constantemente en nuestra vida cotidiana?

Pregunta a tu asesor si lo anterior es factible y, si lo es pide su ayuda para encontrar otros ejemplos.

Ahora que conoces, trata de utilizarlas de manera que faciliten tus actividades cuando tratas de operar con números.

GLOSARIO

En este apartado encontrarás algunos términos que se vieron a lo largo del fascículo y que podrás consultar su significado.

ALGORITMO. Es el procedimiento empleado para obtener el resultado de una operación. La palabra algoritmo es una deformación de ALKHOWARIZMI, nombre de un célebre matemático árabe que vivió en el siglo IX a C.

NÚMERO. Expresión de la cantidad con relación a una unidad.

INVERSO ADITIVO. Es un número opuesto de signo contrario.

SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES: Es el conjunto de los números R que se pueden asociar con puntos R situados sobre una línea recta de tal manera que cada punto está a una distancia r del punto fijo 0.

NÚMERO PRIMO. Son los números naturales mayores que la unidad que sólo tienen dos divisores exactos, es decir sólo se dividen entre la unidad y entre sí mismos.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO. El valor absoluto o valor numérico de un número real negativo es el número mismo positivo.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

ALARCÓN et al.: Matemáticas 1. Enseñanza Media Básica. FCE, México, 1990.

ALARCÓN et al.: Matemáticas 2. Enseñanza Media Básica. FCE, México, 1991.

BARNETT Y NOLASCO: Álgebra Elemental. Estructura y Aplicaciones. Editorial Mc. Graw-Hill. México, 1986.

BRITON Y BELLO: Matemáticas Contemporáneas. 2a. Edición. Harla México, 1982.

GAUSS Carlos F. El Develador de las Incógnitas. Editorial Pangea.

GRIJALBO: El Parque. Biblioteca Juvenil, México, 1975.

PERELMAN et al: *Álgebra Recreativa*. Ediciones Quinto Sol, Harla, México, 1983.

PHILIPS ET AL: Álgebra con Aplicaciones. Harla, México, 1983.

ROBLEDO Y CRUZ: Matemáticas uno Primer Grado. 4a. reimpresión. Trillas, México.

TONDA Y NOREÑA: Los Señores del Cero. Editorial Pangea.