COLEGIO DE BACHILLERES

DIRECCIÓN DE PLANEACIÓN ACADÉMICA

COORDINACION DEL SISTEMA DE ENSEÑANZA ABIERTA

MATEMÁTICAS I

FASCÍCULO III

LENGUAJE ALGEBRAICO: OPERATIVIDAD

ÍNDICE

PRESENTACIÓN GENERAL

El Colegio de Bachilleres, dentro de su plan de trabajo 1991-1994, consideró necesario impulsar la actual zación y homogeneización de los programas de su plan de estudios, en sus modalidades escolarizada abierta.

Con este propósito, y con una amplia participación de maestros del Colegio, se desarrollaron los trab: jos de actualización, orientados al fortalecimiento de la formación propedéutica universitaria de sus egr sados, de tal manera que nuestra Institución responda mejor, desde su ámbito de competencia, a l(requerimientos del país.

Como fruto de ese esfuerzo académico de profesores del Colegio de Bachilleres, en colaboración c(asesores psicopedagógicos y de contenido, se proporcionan a nuestros estudiantes estos fascículos (apoyo al aprendizaje, los que en forma dinámica se irán mejorando en la medida que se recojan las exp riencias directas y enriquecedoras que aporta el ejercicio educativo.

DIRECCIÓN GENER

PRESENTACIÓN

El Colegio de Bachilleres ha preparado este material con el propósito de que el estudio constante y las aportaciones del personal académico promuevan la construcción de un aprendizaje más completo, pues éste exige la responsabilidad y compromiso de quienes participan con este fin.

En este fascículo estudiarás las expresiones algebraicas, tema correspondiente al programa de la asignatura de Matemáticas I.

El presente material tiene entre sus elementos un Índice, un Propósito, una Introducción, además de un Cuestionamiento guía, que te permitirán conocer tanto la organización del contenido de este fascículo como lo que se espera logres al finalizar su estudio.

El contenido de este fascículo incluye actividades, reflexiones, problemas y ejemplos, los cuales es importante que leas cuidadosamente y reflexiones sobre ellos ya que te permitirán ampiar tu conocimiento. Por lo tanto te recomendamos no pasar a otro subtema sin antes de resolver cada problema y consultar tus dudas con tu maestro o asesor.

Al final de cada tema encontrarás las Actividades de consolidación, en las que aplicarás lo aprendido, y que además te ayudarán a evaluar tu aprendizaje.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

TERMINOLOGÍA Y NOTACIÓN

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS, UNA GENERALIZACIÓN

INTRODUCCIÓN

Son muchas y muy diversas las actividades del ser humano en las que es suficiente usar procedimientos aritméticos para resolver problemas; sin embargo, son también muchas en las que éstos no bastan. Hemos visto en el estudio de tu curso de Matemáticas I algunos ejemplos y hemos propuesto otro tipo de procedimientos para resolver los problemas algebraicos.

El método algebraico, de hecho, está presente en toda la Matemática, puesto que la solución de gran número de problemas requieren de cálculo algebraico.

La Álgebra tiene su propio lenguaje, el lenguaje algebraico, por medio del cual se pueden obtener expresiones generales que pueden aplicarse en muchas y muy variadas situaciones particulares.

Aunque en el fascículo II ya empleaste algunos elementos de este lenguaje, en el presente profundizarás en el estudio de las expresiones algebraicas y las operaciones que mediante ellas se realizan.

PROPÓSITO

Al finalizar el estudio de este fascículo conocerás con mayor detalle la terminología que se emplea en Álgebra así como la notación que se usa comúnmente, gracias a lo cual podrás operar con las expresiones algebraicas que incluyen notación exponencial. Asimismo efectuarás operaciones con polinomios.

Todo lo anterior te servirá de base para encontrar la solución de ecuaciones que, como ya has visto, nos ayudan a resolver un gran número de problemas diarios.

CUESTIONAMIENTO GUÍA

En los fascículos I y II utilizaste procedimientos aritméticos para resolver cierto tipo de problemas, pero existen otros cuya solución no es fácil de encontrar con estos procedimientos; por ejemplo:

Una cooperativa ha sido contratada para construir peceras. Se dispone de 5.184 m de ángulo de aluminio para cubrir las uniones entre los cristales de cada pecera, además, se deben satisfacer las siguientes condiciones:

a) Que el largo y el ancho sean iguales.

b) Que el largo sea el doble del ancho.

Se desea saber cuáles deben ser las dimensiones de cada pecera y qué cantidad de vidrio se necesita para la base y los lados de cada una.

Los integrantes de la cooperativa intentaron resolver este problema con procedimientos aritméticos.

¿Cómo lo resolverías?

En éste y otros casos, el empleo de las expresiones algebraicas y las operaciones con ellas son de gran utilidad, ya que constituyen la herramienta más eficiente para su solución.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

TERMINOLOGÍA Y NOTACIÓN

En el fascículo II estudiaste diversos métodos para resolver problemas, además de conocer las ventajas del método consistente en establecer modelos algebraicos para la solución de los problemas, modelos que has empleado, aunque no les llamaras así; por ejemplo: la formula que se utiliza para calcular el área de un triángulo.

$$A = \frac{bh}{2}.$$

Si conocemos la medida b de la base y la medida h de la altura de un triángulo y queremos obtener su área, sustituimos en la fórmula las letras por los datos numéricos. Así, si la base mide 12 metros y la altura 8, el área del triángulo es:

$$A = \frac{12(8)}{2} = 48 \text{ m}^2.$$

Otros ejemplos que has visto son los siguientes:

$$f = ma, \qquad A = \pi r^2, \qquad a = \frac{Vf - Vo}{t}.$$

Estas igualdades, que expresan ciertos fenómenos o leyes de la Física y la Geometría, son expresiones algebraicas de las que iniciaremos su estudio, pues éstas nos permitirán operar de una manera fluida y se facilitar con ello la resolucion de problemas.

Como ejemplo de expresiones algebraicas tenemos:

a) $3a + 2b$; b) $2x - 6y - 3z$; c) $8x^2 - y^3$; d) $\frac{6x}{3a}$; e) $\sqrt{6x^3}$, y f) x.

A las letras, que en las expresiones algebraicas representan a números reales cualesquiera, se les llama literales.

Si en una expresión algebraica se sustituyen las literales por números reales y se efectúan las operaciones indicadas, se obtiene como resultado un número real, el llamado *valor numérico* de la expresion para esos valores.

En los casos en que la(s) literal(es) aparezcan en el denominador hay que tener cuidado de que el valor del denominador sea distinto de cero al efectuar la sustitución. Cuando se trate de raíces, se debe tener cuidado de que al sustituir literales por números no resulten raíces pares de números negativos, porque éstas no son números reales.

Ejemplo:

Calcular el valor numérico de la expresión algebraica

$$\frac{\sqrt{x-3}}{x+5}$$

para los siguientes valores de x:

a) $x=7$; b) $x=12$, y c) $x=-5$.

Solución:

a) Al sustituir a x por 7 obtenemos:

$$\frac{\sqrt{7-3}}{7+5}=\frac{\sqrt{4}}{12}$$

$$=\frac{2}{12}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

b) Si sustituimos a x por 12 resulta:

$$\frac{\sqrt{12-3}}{12+5}=\frac{\sqrt{9}}{17}$$

$$=\frac{3}{17}.$$

c) Si $x=-5$, obtenemos:

$$\frac{\sqrt{-5-3}}{-5+5}=\frac{\sqrt{-8}}{0} \text{ ¡?}$$

Mientras por una parte $\sqrt{-8}$ no es un número real, por otra no es posible dividirlo entre cero; por lo tanto, si x toma el valor de -5, la expresión no simboliza un número real.

Cuando en una expresión algebraica aparece únicamente la operación de multiplicación de números y potencias positivas enteras de las literales, ésta recibe el nombre de *término*, como se muestra a continuación:

$$b^2,\quad \frac{3x^2}{-5},\quad \sqrt{2}\,x,\quad ax^2y^3z^4.$$

Ahora revisaremos los elementos que conforman un término, para lo cual tomaremos el ejemplo de la expresión

$\frac{3}{2}a^4b^5$.

Como ya sabes, un término es el producto de dos o más factores. En este caso los factores son: $\frac{3}{2}$, a^4 y b^5.

Al factor numérico se le conoce como coeficiente numérico del término y se acostumbra escribirlo al principio del término.

$\boxed{\frac{3}{2}}$	a^4, b^5
factor numérico	factores literales
coeficiente numérico	

Por otra parte, cada uno de los factores es *coeficiente* del producto de los otros. Así:

a^4 es coeficiente de $\frac{3}{2}a^4$,

b^5 es coeficiente de $\frac{3}{2}b^5$.

Al producto de los factores literales se le llama *parte literal* del término.

$\frac{3}{2}$	a^3b^4
coeficiente numérico	parte literal

Un factor literal está compuesto por *base y exponente*. En el siguiente cuadro muestra la base y el exponente de los factores literales de

$$\frac{3}{2}a^4b^5.$$

Factor literal	*Base*	*Exponente*
a^4	a	4
b^5	b	5

Recuerda que a^4 indica un producto de cuatro factores iguales y b^5 un producto de cinco factores iguales:

$a^4 = a \cdot a \cdot \quad a$

$b^5 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b.$

Observa que en el ejemplo anterior el punto significa multiplicación y que no se usa el signo de $\times$ para no confundir con la literal x que en algunas expresiones se utiliza.

¿Qué producto indicaría x^8?

Otro elemento del término es el signo (positivo o negativo), que corresponde al signo del coeficiente numérico. Así, si tenemos que en la expresión $3x^2$ su signo es positivo y en la expresión $-4y^6$ el signo es negativo, puedes observar que en los casos con signo positivo no se acostumbra anotar éste.

Otro elemento es el grado de un término, el cual puede ser absoluto o en relación a una variable. El grado absoluto de un término es la suma de los exponentes de las literales o variables, de ahí tenemos que:

Término	*Grado absoluto del término*
a^2	2
$5y$	1
$3xy^2$	3
$6x^2y^4$	6
$9x^ny^n$	n

Observa que el exponente 1 no se escribe, además de que el término $7x^2y^4$ es de grado 6 por la suma de los exponentes $(2 + 4)$ de los factores literales.

Por otro lado, el grado de un término con respecto a una literal corresponde a su exponente, es decir, en $7x^2y^4$ el grado del término con respecto a x es 2 y con respecto a y es 4.

Con el propósito de comprender los conceptos vistos se presenta el siguiente cuadro:

Término	*Coeficiente numérico*	*Factores literales*	*Grado absoluto*	*Grado respecto a x*	*Grado respecto a y*
$-4x^2y^3$	-4	x^2y^3	5	2	3
$3x^3y^4$	3	x^3y^4	7	3	4
$-xy^2$	-1	xy^2	3	1	2
$\frac{3}{4}x^6y^2$	$\frac{3}{4}$	x^6y^2	8	6	2
x	1	x	1	1	0
8	8		0	0	0

Al identificar los elementos de cada una de las expresiones siguientes se cometieron tres errores, encuéntralos.

$-5x^4y$	coeficiente -5 base x, y exponente 4,1	x^2	coeficiente no tiene base x exponente 2
$6a$	coeficiente 6 base a exponente no tiene	$-3xy^2$	coeficiente 3 base x exponente 1, 2

En las expresiones algebraicas los términos están separados por los signos de más (+) o menos (–). Veamos los siguientes ejemplos:

1) $5x^2 + 2x - 3$.

Esta expresión tiene tres términos: $5x^2$; $2x$; -3.

2) $9m^2 - 4n^2$

Esta expresión tiene dos terminos: $9m^2$; $-4n^2$.

3) 5

Esta expresion tiene un término: 5.

Como puedes ver, estas expresiones algebraicas están compuestas por un término o la suma de dos o más términos. A este tipo de expresiones se les llama *polinomios*.

A los polinomios los podemos clasificar según el número de términos que contengan. Si un polinomio tiene un término se le llama monomio; si tiene dos, binomio; si tiene tres términos, trinomio, y así consecutivamente. Observa los siguientes ejemplos:

Polinomios	Clasificación
1) $3x^2y^2 - 6xy^5$	binomio
2) $6x + 2$	binomio
3) $6a^2b - 2a + 6$	trinomio
4) $6y$	monomio
5) $-6xy^2 - 3xy^2 + 4xy + 8$	polinomio

Los polinomios, como los términos, tienen grado, que puede ser grado del polinomio o grado con respecto a una variable. Así, en el ejemplo 1,

$$3x^2y^2 - 6xy^5,$$

el grado del polinomio es seis (6), que corresponde al grado del término de mayor grado, en este caso $6xy^5$. El grado del polinomio respecto a x es dos ya que corresponde al mayor exponente de esa variable en el polinomio $3x^2y^2$

Realiza las siguientes actividades y después compara tus respuestas.

1. De los siguientes términos señala la parte literal, el coeficiente numérico y el grado absoluto del término.

a) $3x^3y^2$

b) $-4a\,b^3$

c) $\frac{2}{3}xy^2$

d) $-a$

2. Clasifica los polinomios por su número de términos y señala su grado absoluto y con respecto a una variable.

a) $3x^2 + 3x - 2$

b) $8x^6y^1 - 3x^5y^2 + 6x^3y^3 - 8$

c) $x^2 - 16$

d) $x^2 - 2xy + y^2$

e) $x - 8$

f) -6

1.	*Término*	*Coeficiente numérico*	*Parte literal*	*Grado absoluto*
a)	$3x^3y^2$	3	x^3y^2	5
b)	$-4ab^3$	-4	ab^3	4
c)	$\frac{2}{3}xy^2$ z	$\frac{2}{3}$	xy^2	3
d)	$-a$	-1	a	1

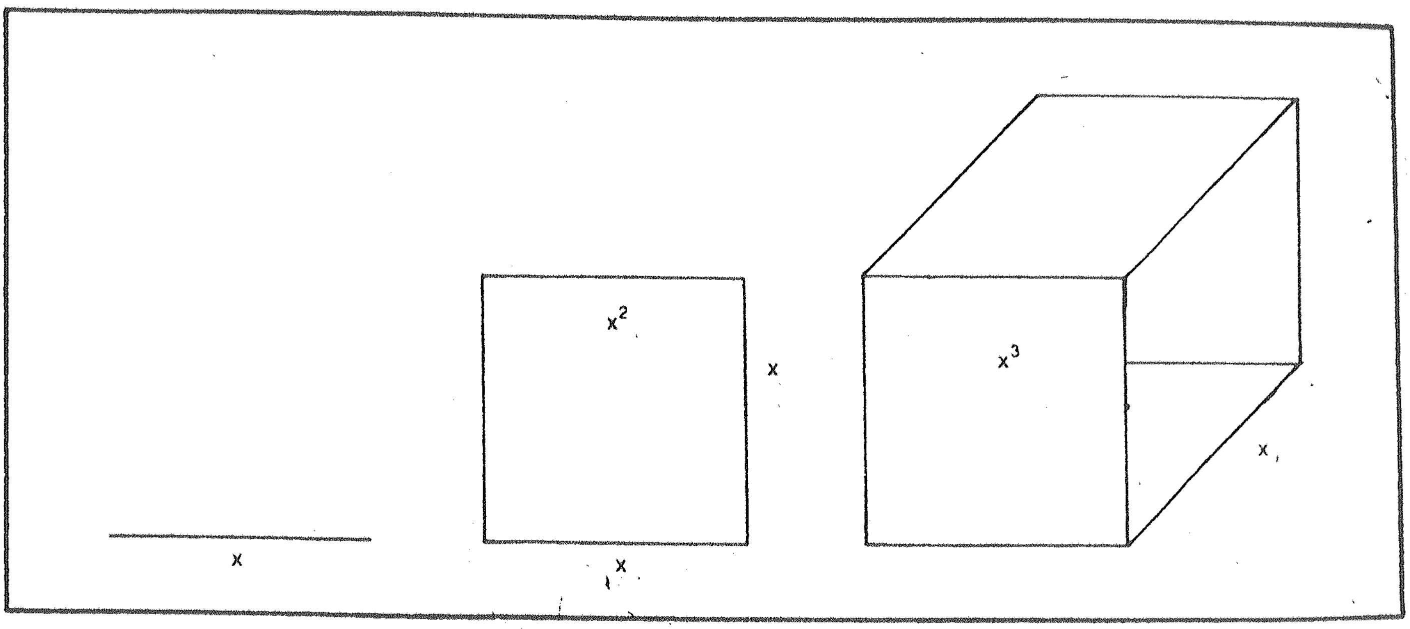
2.	*Polinomios*	*Clasificación por el número de términos*	*Grado absoluto*	*Grado con respecto a x*
a)	$3x^2 + 3x - 2$	trinomio	2	2
b)	$8x^6y^4 - 3x^5y^2 + 6x^3y^3 - 8$	polinomio	10	6
c)	$x^2 - 16$	binomio	2	2
d)	$x^2 - 2xy + y^2$	trinomio	2	2
e)	$x - 8$	binomio	1	1
f)	-6	monomio	0	0

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS: UNA GENERALIZACIÓN DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

Como con el tema anterior aprendiste a distinguir cuáles expresiones algebraicas son términos y qué elementos constituyen a estos últimos, ahora operarás con ellos.

En el estudio de las Matemáticas se encuentran con frecuencia expresiones como $3x$, $4x^2$, $2x^3$. Representamos a x por un segmento de longitud x, a x^2 por un cuadrado de lado x, y ax^3 por un cubo de arista x como se ve en la siguiente figura:



De acuerdo con la interpretación anterior, ¿cuáles de las siguientes sumas crees que pueden expresarse como un solo término?:

a) $2x + 3x^2$; *b*) $4x^3 + 2x^3$; *c*) $2x + 5x$; *d*) $6x - 2x^2$.

Para saber cuándo podemos reducir la suma de dos o más términos a un solo término necesitamos observar su conformación.

¿Recuerdas cuáles son los componentes de un término?

exponentes

$-3 \quad x^2y^3$ ← parte literal

coeficiente numérico

literales

Analicemos los términos de cada uno de los siguientes grupos:

a) $-3x^2$, $4x^2$.

Estos dos términos tienen la misma parte literal, es decir, las literales y sus respectivos exponentes son iguales.

b) $5a^3$, $-2a^2$.

Las partes literales de estos términos son diferentes aun cuando se trata de la misma literal

c) $2x^3y^2$, $\dfrac{-3x^2y^2}{4}$.

Los dos términos tienen la misma parte literal.

d) $0.5x^2y^4$, $1.2y^4x^2$, $-3.5x^4y^2$.

Únicamente los dos primeros términos coinciden en la parte literal ya que por la propiedad conmutativa

$x^2y^4 = y^4x^2$.

e) $\frac{3}{4}m^4$, $-5m^4n$, $\frac{1}{2}m^4$, $\frac{2}{3}m^4n$, $-\frac{1}{3}m^4$.

Aquí tienen la misma parte literal el primero, el tercero y el quinto y por otra parte, el segundo y el cuarto términos.

Hemos encontrado que algunos términos coinciden en su parte literal. Éstos reciben el nombre de términos semejantes y su importancia es muy grande en la simplificación de expresiones algebraicas.

Por lo tanto, términos semejantes son dos o más términos cuyas partes literales son iguales.

Identifica los términos semejantes en cada uno de los siguientes incisos.

a) $2x^2y$, $-3xy^2$, $4y^2x$, x^2y.

b) $3v_1$, $2v_2$, $-4v_1$, $5v_2$*.

c) $2\pi r^2$, $4\pi r$, r^2 $-3r$ en donde $\pi = 3.141592 \ldots$

Las expresiones algebraicas son símbolos que representan números reales; por lo tanto, poseen todas las propiedades de éstos. Además, las propiedades conmutativa y asociativa de la adición y de la multiplicación, y la distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, pueden extenderse a más de dos sumandos o factores según sea el caso, esto es:

* En expresiones como v1, v2 los números 1 y 2 son subíndices. Se usan para indicar que v1 es de v2. Por ejemplo v1 puede ser la velocidad de un móvil y v2 la de otro.

La suma o el producto de un número finito de números reales no es afectado por la forma en que se ordenen o asocien.

Por ejemplo:

$[(a + c) + (b + d)] + (f + e) = (a + b) + [(c + d) + (e + f)] = a + b + c + d + e + f.$

2) El producto de un número real a, por la suma de un número finito de números reales, es igual a la suma de los productos de a, por cada uno de los sumandos.

Por ejemplo:

$a(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae.$

La más sencilla de las operaciones con expresiones algebraicas es la suma de términos semejantes. Se acostumbra llamar a esta operación *reduccion de terminos semejantes*, y la forma de llevarla a cabo se observa en los siguientes ejemplos:

1) Reducir los términos $8x^2 + 6x^2$.

Solución:

$8x^2 + 6x^2 = 14x^2.$

Este resultado se obtuvo al aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en su modalidad $ax + bx = (a + b)x$ a nuestro ejemplo, como vemos en seguida:

$8x^2 + 6x^2 = (8 + 6)x^2 = 14x^2.$

Observa que hemos sumado los coeficientes numéricos de los términos dejando intacta la parte literal.

2) Simplificar la expresión $8y^3 - 7y^3$.

Solución:

$$\begin{aligned} 8y^3-7y^3 &= (8-7)y^3 \\ &= 1 \cdot y^3 \\ &= y^3, \end{aligned}$$

ya que 1 multiplicado por cualquier número tiene como resultado el mismo numero.

3) Simplificar la expresión $3ab + 7ab - 11ab$

Solución:

$$\begin{aligned} 3ab + 7ab - 11ab &= (3 + 7 - 11)ab \\ &= -1ab \\ &= -ab. \end{aligned}$$

Recuerda que $-1(a) = -a$ para todo número real a.

Veamos otros ejemplos en donde no todos los términos son semejantes.

Simplificar la siguiente expresión:

1) $3b^2 + 2b$.

Solución:

Esta suma no se puede reducir porque los términos no son semejantes. Recuerda la interpretación geométrica que le dimos a x, y x^2, en la que la primera representa una línea mientras que la segunda se refiere a una superficie.

2) $a + b - a + b$. Trata de identificar qué propiedad utilizarías antes de ver la solución.

Solución:

Aquí conmutamos y asociamos a los términos semejantes:

$$\begin{aligned} a + b - a + b &= (a - a) + (b + b) \\ &= (1 - 1)a + (1 + 1)b \\ &= 0a + 2b \\ &= 0 + 2b \\ &= 2b. \end{aligned}$$

3) $6.5h + 2.5k + 6 - 1.7h + 3.4k$

Solución:

$$\begin{aligned} 6.5h + 2.5k + 6 - 1.7h + 3.4k &= (6.5h - 1.7h) + (2.5k + 3.4k) + 6 \\ &= (6.5 - 1.7)h + (2.5 + 3.4)k + 6 \\ &= 4.8h + 5.9k + 6. \end{aligned}$$

Con la práctica puedes suprimir algunos pasos del proceso, como se ve en los siguientes ejemplos:

1) $$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}x^3 &= \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{2}x^3 \\ &= \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3. \end{aligned}$$

2) $3E + 2D - F - 4E + 3D - F = -E + 5D - 2F$.

Una de las finalidades del aprendizaje de las operaciones con expresiones algebraicas es el llegar a resolver diversos problemas que se presentan cotidianamente o en algunos casos relacionados con diferentes ciencias. Por el momento únicamente llevaremos a cabo uno de los pasos que se siguen en la resolución de esos problemas: la obtención de la expresión algebraica para una cierta cantidad.

Observa los siguientes ejemplos:

1) Escribe la expresión algebraica que se utiliza para obtener el perímetro de un triángulo tal que, uno de sus lados mide x unidades, otro $\frac{4}{5}$ de éste y el tercero la mitad del primero.

Solución:

El perímetro solicitado es $\frac{23}{10}x$.

2) Expresar algebraicamente el precio total de un pantalón cuyo precio de lista es x pesos más el 10% del IVA.

Solución:

El 10% de x es 0.1 x, así que el precio total del pantalon es $x + 0.1x = (1=0.1)x = 1.1x$.

Observa que la expresión $1.1x$ es el precio con el IVA incluido, de cualquier artículo de precio x.

Resuelve los siguientes ejercicios y después compara tus respuestas con las que se presentan.

1. Identifica los términos semejantes en los siguientes incisos.

a) $1.8c$, $2.5c^2$, $3.4c^2$, $-2c$.

b) $\frac{-mv^2}{5}$ $2mv$, $\frac{mv^2}{3}$, $\frac{-mv}{2}$.

c) $3x^2$, $4xy$, $-2xy$, $5y^2$.

2. Simplifica las siguientes expresiones además de reducir los términos semejantes.

a) $x^2 + 2xy - 2xy + y^2$

b) $a^2 + 2ab + 2ab + b^2$

c) $27a^3 - 18a^2b + 12ab^2 + 18a^2b - 12ab^2 + 8b^3$

d) $\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{6}a^2b + \frac{2}{9}ab^2 - \frac{1}{6}a^2b - \frac{2}{9}ab^2 - \frac{8}{27}b^3$

e) $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_3b_2 - a_1b_3$

f) $8a^2 + 6ab - 12ab - 9b^2$

Soluciones:

1. Los términos semejantes son:

a) $1.8c,\ -2c,\quad 2.5c^2,\ 3.4c^2.$

b) $\frac{-mv^2}{5}, \frac{mv^2}{3},\quad 2\text{mv}, \frac{-\text{mv}}{2}.$

c) $4xy,\ -2xy.$

2.

a) $x^2 + y^2.$

b) $a^2 + 4ab + b^2.$

c) $27a^3 + 8b^3.$

d) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{8}{27}b^3.$

e) La expresión queda igual porque no hay términos semejantes.

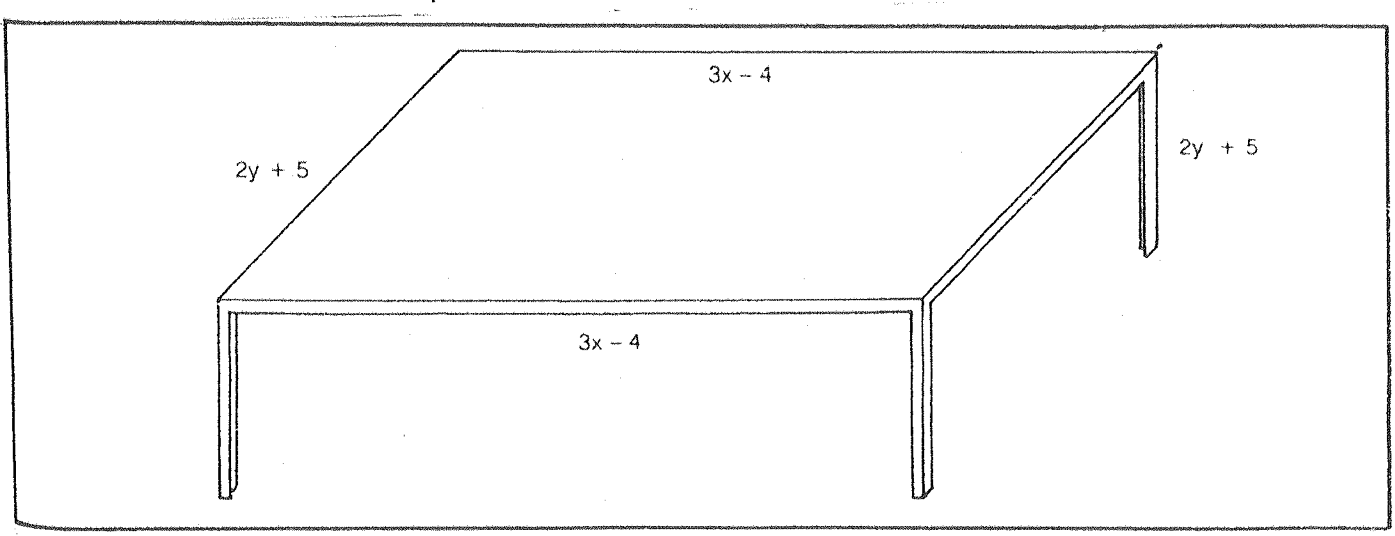
f) $8a^2 - 6ab - 9b^2.$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

En la solución de problemas como el siguiente se observa la utilidad de denominar procedimientos para resolver operaciones con polinomios.

Se tiene una mesa rectangular a la que se desea poner como adorno en la orilla cinta metálica. Si las dimensiones de la mesa son las que muestra la siguiente figura.

¿Cuál es la cantidad de cinta que se usa?



Para determinar la cantidad de cinta a usar, necesitamos resolver operaciones con polinomio

A partir de este momento llamaremos polinomio a expresiones algebraicas como: 0, 7, $3x$ (monomios); $3y^2-7$, $-4xy$ [illegible] (binomios); $6x^4y - 2x3z + 8w$ (trinomio), los cuales podemos escribir en forma general como :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ con } n \in Z,\ n \geq 0 \text{ y } a \in R,$$

de lo que concluimos que $\frac{1}{x}$ y $7 + \sqrt{x}$ no son polinomios.

Ahora vamos a iniciar con las operaciones básicas de adición y sustracción de polinomios.

En vista de que las literales de las expresiones algebraicas representan números reales, los polinomios representan números reales, por lo que en las operaciones con ellos se aplican las propiedades de los números reales.

Para hacer más facil el trabajo con polinomios es conveniente ordenarlos ya sea de forma creciente a decreciente, de esta manera:

$P(x) = 4x^3 - 2x + 8 + 6x^2$

$P(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 8$ En forma decreciente es la manera más utilizada.

$P(x) = 8-2x+6x^2 + 4x^3$ En forma decreciente.

Por otro lado, si el polinomio no es completo (es polinomio completo cuando aparecen todos y cada uno de los exponentes de la variable en forma consecutiva), se recomienda anotar los términos no incluidos, escribiéndoles coeficiente cero como a continuación se indica.

$P(x) = -9x^4 + 3x - 4$

$P(x) = -9x^4 + 0x^3 + 0x2 + 3x - 4$ En forma decreciente, que es la manera más utilizada.

términos
agregados

$P(x) = -4 + 3x + 0x^2 + 0x^3 - 9x^4$ En forma creciente.

Para ilustrar el proceso que se emplea para sumar polinomios, utilizando las propiedades de los números reales, observa los siguientes ejemplos:

Sumar los monomios $5x^3$ y $-9x^3$.

$$\begin{aligned} 5x^3 + (-9x^3) &= 5x^3 - 9x^3 \\ &= (5-9)x^3 \text{. por propiedad distributiva.} \\ &= -4x^3. \end{aligned}$$

Observa que para sumar monomios simplemente se reducen términos semejantes.

Ejemplo:

Para resolver la suma de los polinomios

$(-8x + 7x^4 + 6x^{2}) + (-4x^2 - 3 + 7x)$,

se realizan los siguientes pasos:

– Ordenar en forma decreciente los exponentes de los términos de cada polinomio.

$(7x^4 + 6x^2 - 8x) + (-4x^2 + 7x - 3)$ por conmutatividad.

– Hacer que los polinomios sean completos.

$(7x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 8x + 0) + (0x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 7x \pm 3)$.

– Agrupar los términos semejantes

$(7x^4 + 0x^{4)} + (0x^3 + 0x^3) + (6x^2 - 4x2) + (-8x + 7x) + (0 - 3)$ por propiedad asociativa y conmutativa.

– Reducir términos semejantes:

$7x^4 - 2x^2 - x - 3$.

Así el resultado de la suma de los polinomios originales queda de la siguiente manera:

$(-8x + 7x^4 + 6x^2) + (-4x^2 - 8 + 7x) = 7x^4 + 2x^2 - x - 3$.

Observa que los términos cuyo coeficiente es cero no se escriben.

Ejemplo:

Efectúa la suma de los polinomios

$(4x^3y + 5x^2y^2 + 9xy^3 + 8) + (3xy^3 + 7 - 10x^3y)$.

Observa que en estos polinomios algunos términos tienen dos literales, pero la forma de resolver esta suma es igual:

$(4x^3y + 5x^2y^2 + 9xy^3 + 8) + (-10x^3y + 3xy^3 + 7)$.

¿Notaste que los polinomios han sido ordenados con respecto a la literal x en forma decreciente?

$(4x^3y - 10x^3y) + (5x^2y^2 + 0x^2y^2) + (9xy^3 + 3xy^3) + (8 + 7) = -6x^3y + 5x^2y^2 + 12xy^3 + 15$.

Por lo tanto:

$$(4x^3y + 5x^2y^2 + 9xy^3 + 8) + (3x\text{[illegible]} + 7 - 10x^3y) = -6x^3y + \text{[illegible]}y^2 + 12xy^3 + 1\text{[illegible]}.$$

Ejemplo:

Suma los polinomios $\left(\frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^2\right) + \left(\ -x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}\right)$.

Observa que los coeficientes son racionales, sin embargo, en éste ejemplo el procedimiento es el mismo:

$$\left(\frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{7}{2}\right);$$

$$\left(\frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 0x + \frac{1}{2}\right) + \left(\ 0x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{7}{2}\right);$$

$$\left(\frac{3}{5}x^3 + 0x^3\right) + \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^2\right) + (0x - x\ ) + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right);$$

$$\left(\frac{3}{5} + 0\right)x^3 + \left(\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)x^2 + (0 - 1)x + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right);$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{7}{2}\right) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{5}{12}x^2 - x - 3.$$

Ejemplo:

Suma los polinomios $\left(\frac{7}{3}xy^2 - \frac{6}{5}x^2y + \frac{5}{2}x^4y^3\right) + \left(\frac{5}{4}x^2y + \frac{8}{9}x^3y^4 - \frac{3}{2}x^4y^3 + \frac{2}{5}xy^2\right)$.

En este ejemplo se tienen coeficientes racionales y dos literales; sin embargo, el procedimiento para sumar es igual.

$$\left(\frac{5}{2}x^4y^3 - \frac{6}{5}x^2y + \frac{7}{3}xy^2\right) + \left(\ -\frac{3}{2}x^4y^3 + \frac{8}{9}x^3y^4 - \frac{5}{4}x^2y + \frac{2}{5}xy^2\right);$$

$$\left(\frac{5}{2}x^4y^3 + 0x^3y^4 - \frac{6}{5}x^2y + \frac{7}{3}xy^2\right) + \left(\ -\frac{3}{2}x^4y^3 + \frac{8}{9}x^3y^4 - \frac{5}{4}x^2y + \frac{2}{5}xy^2\right);$$

$$\left(\frac{5}{2}x^4y^3 - \frac{3}{2}x^4y^3\right) + \left(\frac{8}{9}x^3y^4 + 0x^3y^4\right) + \left(\ -\frac{6}{5}x^2y - \frac{5}{4}x^2y\right) + \left(\frac{7}{3}xy^2 + \frac{2}{5}xy^2\right);$$

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)x^4y^3 + \left(\frac{8}{9} + 0\right)x^3y + \left(\ -\frac{6}{5} - \frac{5}{4}\right)x^2y + \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{5}\right)xy^2;$$

$$\left(\frac{7}{3}xy^2 - \frac{6}{5}x^2y + \frac{5}{2}x^4y^3\right) + \left(\frac{5}{4}x^2y + \frac{8}{9}x^3y^4 - \frac{3}{2}x^2y^3 + \frac{2}{5}xy^2\right) = x^4y^3 + \frac{8}{9}x^3y^4 - \frac{49}{20}x^2y + \frac{41}{15}xy^2.$$

Por lo tanto en la suma de tres o más polinomios que incluyen dos o más literales se emplea el mismo procedimiento.

Para restar polinomios se debe recordar que por definición $a - b = a + (-b)$. Esto significa que en la resta de números reales al minuendo se le suma el inverso aditivo del sustraendo

$a - b$ —— sustraendo

minuendo

Por lo consiguiente, es importante que identifiques el inverso aditivo de cualquier polinomio.

¿Recuerdas cómo se localizan en la recta numérica los inversos aditivos de los números reales?

Polinomio	*Inverso aditivo*
$3x^2 - 6x + 4$	$-(3x^2 - 6x + 4) = -3x^2 + 6x \pm 4$
$-6y^2 + 3y - 2$	$-(-6y^2 + 3y - 2) = 6y^2 - 3y + 2$
$-12xy - 6xy^2 + 8$	$-(-12xy - 6xy^2 + 8) = 12xy + 6xy^2 - 8$

Ahora puedes realizar la sustracción de polinomios.

Trata de realizar la siguiente operación:

$(x4 - 5 - 3) - (-8 - 7 + 2) = (x4 - 5 - 3) + (+8 + 7 - 2) =$

El procedimiento aritmético que utilizaste para realizar la operación anterior se utiliza para restar polinomios; por ejemplo, para restar los polinomios

$(7x^3 - 8x^4 + 6x) - (-2x + 6x^3 - 4x^2 + 8x^4)$ se obtiene el inverso aditivo del sustraendo.

sustraendo	inverso aditivo
$-2x + 6x^3 - 4x^2 + 8x^4$	$2x - 6x^3 + 4x^2 - 8x^4$

Una vez obtenido éste se procede a efectuar la suma de polinomios, aplicando el procedimiento adecuado.

$(-8x^4 + 7x^3 + 6x) + (-8x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 2x)$

$(-8x^4 + 7x^3 + 0x^2 + 6x) + (-8x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 2x) =$

$$= (-8x^4 - 8x^4) + (7x^3 - 6x^3) + (0x^2 + 4x^2) + (6x + 2x) =$$

$$= (-8 - 8)x^4 + (7 - 6)x^3 + (0 + 4)x^2 + (6 + 2)x.$$

$$(7x^3 - 8x^4 + 6x) - (-2x + 6x^3 - 4x^2 + 8x^4) = -16x^4 + x^3 + 4x^2 + 8x.$$

Observa que en la sustracción de polinomios lo que realmente se hace es sumar al minuendo, el inverso aditivo del polinomio correspondiente al sustraendo.

Si en la solución de la siguiente sustracción de los polinomios

$$(3x^2 + 2x - 6) - (-x^2 - 6x + 8),$$

se obtiene como resultado $2x^2 - 4x - 2$, se estaría cometiendo un error, ¿cuál es éste?

Resta los siguientes polinomios:

$$(7x^2y - 8x^3y^3 - 5xy^4 + 6) - (4x^2y + 6x^4y^2 - 5 - 3x^3y^3).$$

$$(7x^2y - 8x^3y^3 - 5xy^4 + 6) + (-4x^2y - 6x^4y^2 + 5 + 3x^3y^3).$$

inverso aditivo del sustraendo

Ordenando los polinomios:

$$(-8x^3y^3 + 7x^2y - 5xy^4 + 6) + (-6x^4y^2 + 3x^3y^3 - 4x^2y + 5).$$

Completando los polinomios:

$$(0x^4y^2 - 8x^3y^3 + 7x^2y - 5xy^4 + 6) + (-6x^4y^2 + 3x^3y^3 - 4x^2y + 0xy^4 + 5).$$

Agrupando terminos semejantes:

$$(0x^4y^2 - 6x^4y^2) + (-8x^3y^3 + 3x^3y^3) + (7x^2y - 4x^2y) + (5xy^4 + 0xy^4) + (6 + 5).$$

Sacando factor común:

$$(0 - 6)\, x^4y^2 + (-8 + 3)\, x^3y^3 + (7 - 4)\, x^2y + (-5 + 0)\, xy^4 + (6 + 5).$$

Efectuando operaciones:

$$(7x^2y - 8x^3y^3 - 5xy^4 + 6) - (4x^2y + 6x^4y^2 - 5 - 3x^3y^3) = -6x^4y^2 - 5x^3y^3 + 3x^2y - 5xy^4 + 11.$$

Otra manera de resolver las adiciones y sustracciones de polinomios es colocándolos en forma vertical, aunque se debe cuidar que en la misma columna queden los términos semejantes.

Ejemplo:

Suma de polinomios: $(8x^3 - 3x^2 + 7)$ y $(2x^2 - 3x + 4)$

$$
\begin{array}{rr}
 & 8x^3 - 3x^2 + 0x + 7 \\
+ & 0x^3 + 2x^2 - 3x + 4 \\
\hline
 & 8x^3 - x^2 - 3x + 11x.
\end{array}
$$

Ejemplo:

Si se tiene la sustracción: $(7x^3 - 8x^4 + 6x) - (-2x + 6x^3 - 4x^2 + 8x^4)$.

Recuerda que en la sustracción, al minuendo se le suma el inverso aditivo del sustraendo, por lo que se le cambia de signo a todos y cada uno de los términos del sustraendo y se suman los polinomios.

$$
\begin{array}{rr}
 & -8x^4 + 7x^3 + 0x^2 + 6x \\
+ & -8x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 2x \\
\hline
 & -16x^4 + x^3 + 4x^2 + 8x.
\end{array}
$$

Ejemplo:

Realiza la operación de: $\left(\frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^2\right) - \left(-x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}\right)$.

$$
\begin{array}{r}
\frac{3}{5}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 0x + \frac{1}{2} \\
0x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{7}{2} \\
\hline
\frac{3}{5}x^3 - \frac{11}{12}x^2 + x + 4.
\end{array}
$$

Ejemplo:

Resta los polinomios: $(7x^2y - 8x^3y^3 - 5x^4y + 6) - (4x^2y + 6x^4y^2 - 5 - 3x^3y^3)$.

$$
\begin{array}{r}
0x^4y^2 - 8x^3y^3 + 7x^2 - 5xy^4 + 6 \\
-6x^4y^2 + 3x^3y^3 - 4x^2y + 0xy^4 + 5 \\
\hline
-6x^4 - 5x^3y^3 + 3x^2y - 5xy^4 + 11.
\end{array}
$$

Cuando se realizan operaciones de adición y sustracción es necesario trabajar, en algunos casos, con signos de agrupación, por lo que a continuación te presentamos algunos ejemplos tomando en cuenta las siguientes reglas:

- Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo + se deja el signo que tenga cada término que se halle dentro de él.

- Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo − se cambia el signo a cada término que se halle dentro de él.

Ejemplo:

$\left\{-6ab + 3a - [4a - (6ab + 2a)]\right\}$.

Recuerda que para restar se suma el inverso aditivo.

Se inicia con la eliminación del signo de agrupación que contiene menor número de términos. (Paréntesis.)

$\left\{-6ab + 3a - [4a - 8ab - 2a\ ]\right\}$.

Se continúa con el signo de agrupación que contiene menor número de términos, después de los paréntesis. (Corchete.)

$\left\{-6ab + 3a - 4a + 8ab + 2a\right\}$.

Ahora vamos a eliminar el signo de agrupación que queda. (Llave.)

$-6ab + 3a - 4a + 8ab + 2a$.

Después se aplica el procedimiento para la solución de la adición y la sustracción de polinomios:

$-6ab - 8ab + 3a - 4a + 2a$;

$(-6 - 8)ab + (3 - 4 + 2)a$.

Así, el resultado de suprimir signos de agrupación es:

$-6ab + 3a - [4a - (-8ab + 2a)] = -14ab + a$.

Ejemplo:

$2x - [-5x - (-\ 2y +\ \ -x + 3y)]$.

Al aplicar el mismo procedimiento, obtenemos:

$2x + [-5x - (-2y - x + 3y)]$;

$2x + [-5x + 2y + x - 3y]$;

$2x - 5x + 2y + x + 3y$;

$2x - 5x + x + 2y - 3y$;

$2x + [-5x -\ \ -2y +\ \ -x + y)] = -2x - y$.

Ahora retomemos el problema de la mesa rectangular.

Recordemos que las dimensiones de esta mesa son $3x - 4$ y $2y + 5$. Como ya sabes el perímetro es la suma de los lados de la figura, por tanto hay que obtener la suma de los polinomios

$(3x-4)+(3x-4)+(2y+5)+(2y+5)$, con lo que al hacer la adición tenemos:

$$\begin{aligned}(3x-4)+(3x-4)+(2y+5)+(2y+5) &= 3x-4+3x-4+2y+5+2y+5\\ &= (3+3)x+(2+2)y+(-4-4+5+5)\\ &= 6x+4y+2.\end{aligned}$$

La expresión algebraica que representa la cinta metálica a utilizar es $6x+4y+2$.

Trata de resolver las siguientes operaciones, después compara tus respuestas.

a) $(3x^2+9x^3+1-2x)+(-3x+7x^3-4)=$

b) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{14}{3}x^2+\frac{9}{5}\right)+\left(-\frac{7}{5}x^3-\frac{8}{3}x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{2}\right)=$

c) $(-8x^3-5x+2x^2)-(9x+bx^3+5)=$

d) $(-3x^2y-8+4xy^2)-(5xy^2-2x^2y+9)=$

e) $\left(\frac{2}{7}x^3y+\frac{8}{3}x^2y^3-\frac{4}{5}xy^2\right)-\left(\frac{3}{4}xy^2+\frac{2}{7}-\frac{5}{4}x^3y\right)=$

f) $2a-\{-x+[a-1-(a+x-63)]\}$

En seguida se presentan los resultados de las operaciones propuestas.

Operación	Solución
a) $(3x^2+9x^3+1-2x)+(-3x+7x^3-4)$	$16x^3+3x^2-5x-3$
b) $\left(\frac{3}{4}x-\frac{14}{3}x^2+\frac{9}{5}\right)-\left(-\frac{7}{5}-\frac{8}{3}x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{7}{5}x^3-\frac{22}{3}x^2-\frac{3}{28}x+\frac{33}{10}$
c) $(-8x^3-5x+2x^2)-(9x+6x^3+5)$	$-14x^3+2x^2+14x-5$
d) $(-3x^2y-8+4xy^2)-(5xy^2-2x^2y+9)$	$-x^2y-xy^2-17$
e) $\left(\frac{2}{7}x^3y+\frac{8}{3}x^2y^3-\frac{4}{5x}y^2\right)-\left(\frac{3}{4}xy^2+\frac{2}{7}-\frac{5}{4}x^3y\right)$	$\frac{43}{28}x^3y+\frac{8}{3}x^2y^3-\frac{1}{20}xy^2-\frac{13}{21}$
f) $2a-\{-x+[a-1-(a+x-3)]\}$	$2a+2x-2$

MULTIPLICACION DE POLINOMIOS

Como ya se tiene conocimiento de los polinomios y en particular se aprendió la forma de sumarlos, iniciaremos ahora el estudio de la multiplicacion de polinomios. Para efectuar el producto de polinomios haremos uso de las operaciones de los números reales.

Empezaremos nuestro estudio con la multiplicación de dos potencias de la misma base:

Ejemplo:

Multiplicar x^2 por x^3.

Solución:

$$x^2 \cdot x^3 = \underbrace{x \cdot x}_{2 \text{ factores}} \quad \underbrace{x \cdot x \cdot x}_{3 \text{ factores}} \quad \text{es decir, } x^{2+3} = x^5;$$

$$x^2 \cdot x^3 = \underbrace{(x \cdot x)}_{2 \text{ factores}} \quad \underbrace{(x \cdot x \cdot x)}_{3 \text{ factores}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)}_{5 \text{ factores}}.$$

Se observa en el ejemplo que se han sumado los exponentes.

Ejemplo:

Multiplica x^m por x^2.

Solución:

$$x^m \cdot x^2 \quad \overbrace{(x \cdot x \cdot x \ldots\ldots x)}^{m \text{ factores}} \quad \overbrace{(x \cdot x)}^{2 \text{ factores}}, \quad \text{es decir} \quad \overbrace{(x \ldots\ldots x)}^{m + 2 \text{ factores}} = x^{m+2}.$$

En general, si a es un número real distinto de cero y m y n son números enteros no negativos, entonces

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\overbrace{(a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a)}^{m \text{ factores}} \quad \overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n \text{ factores}}}_{m + n \text{ factores}},$$

es decir, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Esto nos conduce a lo que llamamos la primera ley de los exponentes, la cual se enuncia de la siguiente manera:

El producto de dos potencias de la misma base, es igual a la base elevada a la suma de dos exponentes.

Ejemplo:

Multiplicar $y^5 \cdot y^2 = y^{5+2} = y^7$.

¿Cómo multiplicarías $5a^2$ por $4a^2$?

Observa que en este ejemplo hacemos uso de las propiedades asociativa y conmutativa del producto.

$(5a^2)\,(4a) = (5 \cdot 4)\,(a^2 \cdot a)$.

Sustituimos los factores 5 y 4 por su producto, es decir:

$(5a^2)\,(4a) = 20\,(a^2 \cdot a)$;

$(5a^2)\,(4a) = 20a^{2+1} = 20a^3$.

Ejemplos:

$(2m^2)\,(5m) = (2 \cdot 5)\,m^{2+1} = 10m^3$;

$(5x^2)\,(6x^5) = (5 \cdot 6)\,(x^2 \cdot x^5) = 30x^{2+5} = 30x^7$;

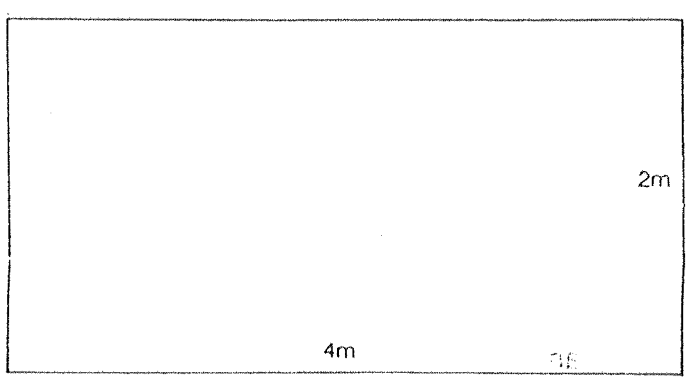
$(-3a^2)\,(8a^6) = (-3 \cdot 8)\,(a^2 \cdot a^6) = -24a^{2+6} = -24a^8$;

$(7y)\,(-8y^5) = (7 \cdot (-8))\,(y \cdot y^5) = -56y^{1+5} = -56y^6$;

$(-3b^2)\,(-6b^8) = (-3)\,(-6)\,(b^2 \cdot b^8) = 18b^2 + 8 = 18b^{10}$.

Ejemplo:

La siguiente figura representa la cubierta de una mesa.



El área de la figura se obtiene a través de una multiplicación de monomios, es decir,

A $(4m)(2m) = 8m^2$.

Se observa en el ejemplo, que la solución resulta ser otro monomio en el cual ha cambiado no sólo .. coeficiente, la expresión de la variable (concretamente, su exponente) y el grado del monomio, sino también su característica esencial ya que al multiplicar longitudes se obtienen superficies.

Esto nos muestra que la multiplicación de expresiones algebraicas produce cambios importantes; por ejemplo, al multiplicar una potencia por un tiempo, se obtiene trabajo; si se multiplica una masa por una aceleración, se obtiene fuerza, etc. De esta manera, se puede comprender mejor el carácter de la multiplicación algebraica y su importancia.

Mediante las propiedades de los números reales, las leyes de los exponentes y la regla de los signos se ha obtenido el producto de monomios. En los ejercicios que se dan a continuación deberás obtener el producto de monomios con la aplicación de las propiedades y leyes correspondientes. Indica como en los ejemplos planteados cuáles propiedades o reglas utilizaste.

1) $(8mn)(m^2)$

2) $(-6x^2y)(3xy)$

3) $(-5ab)(-4a^2b)$

4) $(x^3y^2z^6)(2x^2y^3z^3)(5xyz)$

5) $(-6x^2yz)(2x^3yz^2)$

6) $x^{p+1} \cdot x^p \cdot x$

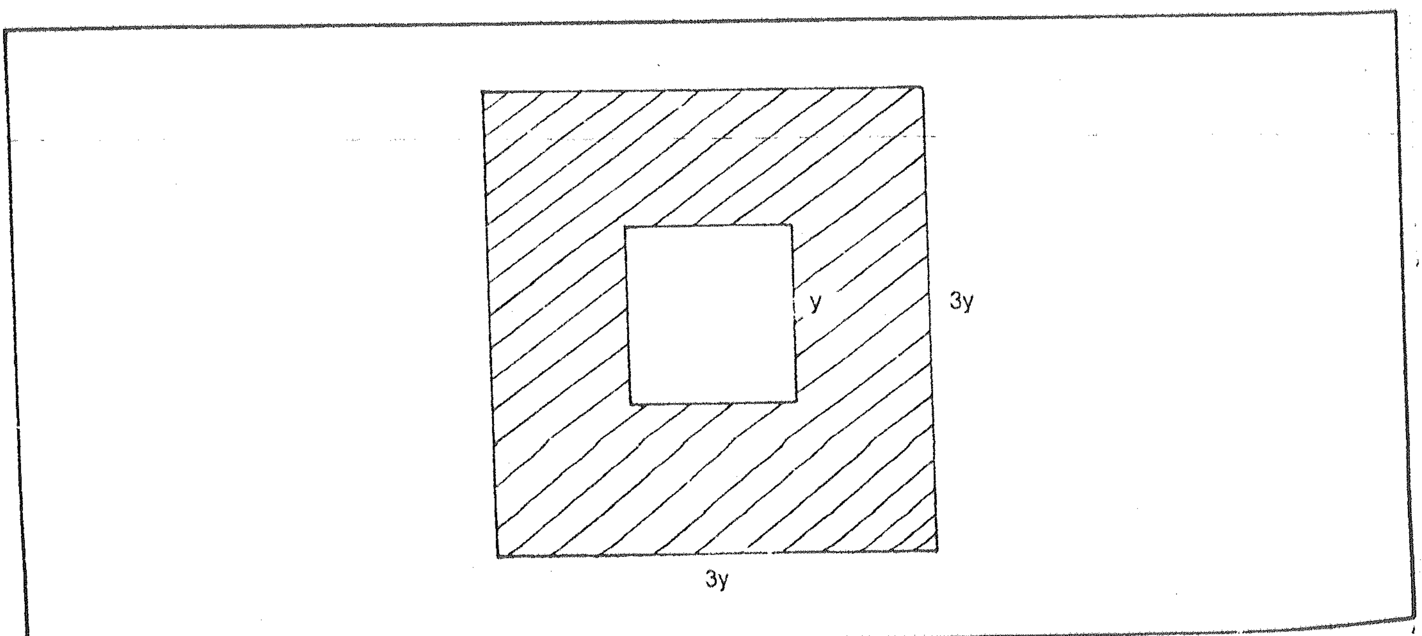
7) $\sqrt{x}\, y^{2n} \cdot y^n \cdot y^n$

8) $x^m \cdot 2xy \cdot y^m$

9) $x^2 \cdot 3x^2 \cdot 5x^2 \cdot 2x^2$

10) $8m^7 \cdot n^2 \cdot 2m^3 \cdot n^7$

Sabemos que el área de una figura como la siguiente, se obtiene por medio de una multiplicación de los monomios. Determina cuál es el monomio resultante de la región sombreada.



a) Monomio resultante del cuadro mayor: _________

b) Monomio resultante del cuadro menor: ___________

c) Monomio resultante de la región sombreada: ________

Una vez que te has familiarizado con potencias de la misma base, determinaremos la potencia de otra potencia.

Ejemplo:

$(3^4)^5 = \underbrace{3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4}_{\text{5 factores}}$, y por la primera ley de los exponentes:

$(3^4)^5 = 3^{\overbrace{4+4+4+4+4}^{\text{5 sumandos}}} = 3^{20}$,

es decir, $(3^4)^5 = 3^{4 \cdot 5} = 3^{20}$.

Se observa en el ejemplo que se han multiplicado los exponentes.

Ejemplo:

$(b^2)^n = \underbrace{b^2 \cdot b^2 \ldots\ldots b^2}_{\text{n factores}}$;

$(b^2)^n = b^{\overbrace{2+2+2+\ldots\ldots+2}^{\text{n sumandos}}}$, esto es,

$(b^2)^n = b^{2n}$.

En general, si a es un número real distinto de cero y m y n son números enteros positivos entonces.

$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots\ldots a^m}_{\text{n factores}}$;

$(a^m)^n = a^{\overbrace{m+m+m+\ldots\ldots+m}^{\text{n sumandos}}}$.

Por lo tanto, $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Esto nos conduce a la que llamaremos segunda ley de los exponentes:

> La potencia de otra potencia de la misma base, es igual a la base elevada al producto de los exponentes.

Ejemplo:

$(x^2)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;

3 factores

3 sumandos

$(x^2)^3 = x^{2+2+2} = x^6$,

es decir, $(x^2)^3 = x^6$.

Observa que se han multiplicado los exponentes.

El siguiente ejemplo nos servirá para mostrar cómo obtener el producto de monomios.

Ejemplo:

Multiplicar $(5a^2)^3$ por $(2a)^2$.

$(5a^2)^3 \cdot (2a)^2$

Al aplicar la segunda ley de los exponentes se obtiene:

$(5a^2)^3 \cdot (2a)^2 = (5^3a^6)\,(2^2a^2)$.

Por propiedad conmutativa de la multiplicación cambiamos el orden de los factores 5^3, a^6, 2^2, a^2 y asociamos de diferente manera.

$(5^2\ )^3 \cdot (2a)^2 = (5^3 \cdot 2^2)\,(a^6 \cdot a^2)$.

Efectuemos operaciones:

$(125 \cdot 4) = 500$, es decir,

$(5a^2)^3 \cdot (2a)^2 = 500\,(a^6a^2)$.

Por la primera ley de los exponentes, se tiene:

$500\,(a^6a^2) = 500\,(a^{6+2}) = 500a^8$; por lo tanto,

$\left(5a^2\right)^3 \cdot (2a)^2 = 500a^8.$

Obtén los siguientes productos:

a) $(3x^2)\,(x)^2$

b) $(-8a^3)\,(2a^2)^2$

c) $(-6a^5)^2\,(-2a)^3$

d) $(3y^5)\,(-6y^2)^3$

A continuación determinaremos la potencia de un producto.

Ejemplo:

$$(a \cdot b)^5 = \underbrace{(a \cdot b)\,(a \cdot b)\,(a \cdot b)\,(a \cdot b)\,(a \cdot b)}_{5 \text{ factores}}.$$

Al conmutar los factores y asociar de diferente manera:

$$(a \cdot b)^5 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{5 \text{ factores}}\,\underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b)}_{5 \text{ factores}},$$

es decir, $(a \cdot b)^5 = a^5 \cdot b^5$.

Ejemplo:

$$(x\,y)^n = \underbrace{(x\,y) \cdot (x\,y) \cdot (x\,y) \cdot \ldots\ldots \cdot (x\,y)}_{n \text{ factores}}$$

Al conmutar los factores y asociar de diferente manera:

$$(x\,y)^n = \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\ldots \cdot x)}_{n \text{ factores}}\,\underbrace{(y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot \ldots\ldots \cdot y)}_{n \text{ factores}}.$$

$(x\,y)^n = x^n \cdot y^n$

En general, si a y b son dos números reales y m es un número entero positivo, entonces:

$(a \cdot b)^m = (ab)\,(ab) \ldots\ldots (ab)$

m factores

$= a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a$ $\qquad$ $b \cdot b \cdot b \cdot \ldots\ldots \cdot b$

m factores $\qquad$ m factores

$(a \cdot b)^m = a^n\, b^n.$

La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevados a la misma potencia.

Ejemplos:

a) $(x\,y)^m = x^m \cdot y^m.$

b) $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144\,.$

c) $(a^{2} \cdot b^{3})^3 = a^{2 \cdot 3}\, b^{3 \cdot 3} = a^6\, b^9.$

d) $(5a^{2})^2 = 5^3\, a^{2 \cdot 3} = 125\, a^6.$

La ley anterior también podemos utilizarla para obtener el producto de un monomio; por ejemplo:

Multiplicar $(3a^2)^2$ por $(5b)^3$.

Por la tercera ley de los exponentes, se tiene:

$(3a^2)^2\,(5b)^3 = (3^2\, a^4)\,(5^3\, b^3).$

Por la propiedad conmutativa, combinamos el orden de los factores 3^2, 5^3, a^4, b^3 y asociamos de diferente manera:

$(3a^{2})^2\,(5b)^3 = (3^2\, 5^3)\,(a^4\, b^3).$

Efectuamos el producto y se tiene:

$(3a^2)^2\,(5b)^3 = (1125)\,(a^4 b^3).$

Obtener el producto de los siguientes monomios.

a) $(-3x)^3(ab)^2$

b) $(a^2b^2)^3 \quad (3a^3b)^2$

c) $(4y^{5})^2 \quad (x^3\, y^2)^5$

d) $(m^2n)^3 \quad (-8xy^2)^2$

e) $(-a^2b^5)^2 \quad (-3a^2b^2)^3$

f) $-(3x^2y^3)^5 \quad (2x^3y)^2$

A continuación se determinará la forma de elevar una fracción a un exponente. Para ello veamos el siguiente ejemplo:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)}_{\text{3 factores}}.$$

Asociando:

$$\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x \cdot x \cdot x}{y \cdot y \cdot y} = \frac{x^3}{y^3}.$$

Se observa en el ejemplo que tanto el numerador x, como el denominador y se elevan al exponente 3.

En general, si a y b son dos números enteros diferentes de cero y m es un número entero positivo entonces :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \overbrace{\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{m \text{ factores}}}^{\text{m factores}} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots\ldots \cdot b}_{m \text{ factores}}}.$$

es decir, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Esto nos conduce a la cuarta ley de los exponentes la cual se enuncia de la siguiente manera:

> Para elevar una fracción a un exponente, tanto el numerador como el denominador se elevan a dicho exponente.

Ejemplos:

a) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$

b) $\left(\frac{4}{b}\right)^3 = \frac{4^3}{b^3} = \frac{64}{b^3}$

c) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^3 = \frac{a^6}{b^9}$

d) $\left(\frac{b}{a^2}\right)^5 = \frac{b^5}{a^{10}}$

Ahora trataremos la división de potencias de la misma base distinta de cero.

El cociente de dos potencias de la misma base distinta de cero, presenta tres casos, los cuales dependen de que el exponente del dividendo sea mayor, igual o menor que el del divisor, es decir

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^m & \text{si } m > n \\ 1 \text{ si } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{si } m < n. \end{cases}$$

Primer caso: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$.

Ejemplo:

$$\frac{8^5}{8^3} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{8 \cdot 8 \cdot 8} = 1 \cdot 8^{5-3} = 8^2 \, ;$$

m factores

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a} = a^{m-n}$$

n factores

Por lo tanto, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $m > n$, lo cual nos muestra el primer caso de la quinta ley de los exponentes.

Ejemplos:

a) $\frac{10^5}{10^2} = 10^{5-2} = 10^3$

b) $\frac{m^8}{m^3} = m^{8-3} = m^5$

c) $\frac{6^8}{6^4} = 6^{8-4} = 6^4$

d) $\frac{y^4}{y} = y^{4-1} = y^3$

Ahora, obtengamos el producto de monomios.

Ejemplos:

Multiplicar $\frac{(6x)^4}{(6x)^2} \cdot \frac{(3y^2)^5}{(3y^2)^3}$.

Para ley de los exponentes se tiene:

$$\frac{(6x)^4}{(6x)^2} \cdot \frac{(3y^2)^5}{(3y^2)^3} = (6x)^2 \; (3y^2)^2$$

$$= (6^2x^2) \; (3^2y^4).$$

Por la propiedad conmutativa se cambia el orden de los factores $6^2, x^2, 3^2, y^4$, es decir,

$$\frac{(6x)^4}{(6x)^2} \cdot \frac{(3y^2)^5}{(3y^2)^3} = (6^2 \cdot 3^2)\ (x^2 \cdot y^4).$$

Para la propiedad asociativa sustituimos los factores 6^2 y 3^2 por su producto, esto es:

$$\frac{(6x)^4}{(6x)^2} \cdot \frac{(3y^2)^5}{(3y^2)^2} = 324\, x^2y^4.$$

Por lo tanto $\dfrac{(6x)^4}{(6x)^2} \cdot \dfrac{(3y^2)^5}{(3y^2)^3} = 324\, x^2y^4.$

Obtén el producto de los siguientes monomios aplicando las propiedades de los números reales y las leyes de los exponentes. Justifica la respuesta.

a) $\dfrac{(4x)^8}{(4x)^3} \cdot \dfrac{(2x)^3}{(2x)}$ b) $\dfrac{(3a^2)^7}{(3a^2)^5}$ c) $\dfrac{8b^6}{8b^5}$

d) $\dfrac{(2x^3)^5}{(2x^3)^2}$ e) $\dfrac{(x^6)^3}{(x^6)^2}$ f) $\dfrac{(4a^2)^2}{(4a^2)^3}$

Segundo caso $\dfrac{a^m}{a^n} = 1$ si $m = n$.

Aquí el cociente es igual a uno ya que una cantidad dividida entre sí misma da la unidad.

Ejemplo:

$$\frac{3^2}{3^2} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 1.$$

En general, si a es un número real difirente de cero y m y n números enteros no negativos, entonces:

m factores

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a} = 1, \quad \text{ya que } m = n,$$

n factores

es decir, $\dfrac{a^m}{a^m} = 1$, lo cual demuestra el segundo caso de la quinta ley de los exponentes.

Ejemplos:

a) $\dfrac{m^3}{m^3} = 1,$ b) $\dfrac{8^2}{8^2} = 1,$ c) $\dfrac{n^5}{n^5} = 1,$ d) $\dfrac{b^{10}}{b^{10}} = 1.$

En el tercer caso de la quinta ley de los exponentes, $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$, la m es menor que la n.

Ejemplo:

$$\frac{6^3}{6^3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} \cdot \frac{1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 1 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6^3}.$$

Ejemplo:

$$\frac{(2x^2)}{(2x^2)^5} = \frac{(2x^2)\,(2x^2)}{(2x^2)\,(2x^2)\,(2x^2)\,(2x^2)\,(2x^2)} = \frac{(2x^2)\,(2x^2)}{(2x^2)\,(2x^2)} \cdot \frac{1}{(2x^2)\,(2x^2)\,(2x^2)} = 1 \cdot \frac{1}{(2x^2)^3} = \frac{1}{(2x^2)^3}.$$

En general, si a es un número real diferente de cero y m y n números enteros no negativos en donde $m <$, entonces:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}^{\text{m factores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{\text{n factores}}}$$

$$= \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}^{\text{m factores}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{m \text{ factores}}} \cdot \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n\text{-}m \text{ factores}}} = 1 \cdot \frac{1}{a^{n-m}},$$

es decir, $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ si $m > n$, que es el tercer caso de la quinta propiedad de los exponentes.

Ejemplos:

$$\frac{(a^2)^2}{(a^2)^4} = \frac{a^2 \cdot a^2}{a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a^2} = \frac{a^2 \cdot a^2}{a^2 \cdot a^2} \cdot \frac{1}{a^2 \cdot a^2} = 1 \cdot \frac{1}{a^2 \cdot a^2} = \frac{1}{(a^2)^2} = \frac{1}{a^4}.$$

Resuelve los siguientes ejercicios y justifica tu respuesta:

a) $\dfrac{(4x^2)^2}{(4x^2)^2}$

b) $\dfrac{(m^3)^4}{(m^3)^5}$

c) $\dfrac{(2y^3)}{(2y^3)^6}$

d) $\dfrac{(5\,a^2b)^2}{(5\,a^2b)^3}$

También se puede obtener el producto de monomios al aplicar esta ley.

Ejemplo:

Multiplica $\dfrac{(3x)^2}{(3x)^3} \cdot \dfrac{(2x)}{(2x)^3}$.

Al aplicar el tercer caso de la quinta ley de los exponentes:

$$\frac{(3x)^2}{(3x)^3} \cdot \frac{(2x)}{(2x)^3} = \frac{1}{(3x)^{3-2}} \cdot \frac{1}{(2x)^{3-1}} =$$

$$= \frac{1}{(3x)} \cdot \frac{1}{(2x)^2} =$$

$$= \frac{1}{(3x)\,(2x)^2} = \frac{1}{12x^3}.$$

Simplifica los siguientes monomios:

a) $\dfrac{(5x)^2}{(5x)^4}$

b) $\dfrac{(x)^2}{(x)^6}$

c) $\dfrac{(4xy^4)^3}{(4xy^4)^5}$

d) $\dfrac{(3a^2b)}{(3a^2b)^3}$

Una vez que te has familiarizado con la leyes de los exponentes, ahora estudiaremos los exponentes cero.

Hemos definido ya las potencias con exponentes enteros positivos y obtenido leyes para operar con ellas. Necesitamos ahora dar una interpretación a las potencias con exponentes cero y negativos que nos permita hacer extensivas a ellas las leyes ya establecidas.

Exponente cero

La interpretación que se le da a a^0 (siendo $a \neq 0$), deberá hacer cierta la igualdad

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n,$$

la cual se ha obtenido al extender la primera ley de los exponentes.

Entonces $a^0 = 1$, porque 1 es el número que multiplicado por a^n nos da un producto igual a a^n. (Recuerda que el elemento neutro de la multiplicación es el 1.)

Con base en el razonamiento anterior se ha convenido que:

a^0 para $a \neq 0$

La expresión a^0 carece de significado para $a = 0$.

Exponentes negativos

El significado que se le asigna a a^{-n}, en donde n es un número positivo y $a \neq 0$, deberá ser congruente con la extensión que deseamos hacer de la primera ley de los exponentes, esto es, tendrá que hacer verdadera la igualdad

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,$$

puesto que a^{-n}, $a^n = 1$; entonces:

a^{-n} debe ser el inverso multiplicador de a^n, es decir,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

aceptando entonces para a^{-n} el significado siguiente:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ para } a \neq 0 \text{ y, } n \text{ entero positivo.}$$

Ejemplo:

Simplificar y escribir sin exponentes cero o negativos $\dfrac{5x^2y^{-3}}{3x^{-2}}$.

Solución:

$$\frac{5x^2y^{-3}}{3x^{-3}} = \frac{5x^{2-(-2)}y^{-3}}{3} = \frac{5x^4}{3y^3}$$

Simplifica y escribe sin exponentes cero o negativos las siguientes expresiones:

a) $\left(\dfrac{8x^{-3}}{6x^6}\right)^{-3}$

b) $\dfrac{6y^2z^{-3}}{2y^5z^0}$

c) $\dfrac{4xy^2}{10x^2y^{-5}}$

d) $\dfrac{3a^4}{12a^{-10}}$

e) $\dfrac{2x^5y^{-3}}{3a^8y^5}$

f) $\left(\dfrac{5a^3b^5c^{-1}}{15a^2b^2c^{-1}}\right)^2$

Hay otras propiedades que se usan con frecuencia y que pueden establecerse en forma sencilla a partir de las definiciones de exponentes negativos y de las leyes de los exponentes.

Caso 1

Ejemplo:

$$\frac{a^{-2}}{b^{-5}} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^5}};$$

pero $\dfrac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^5}} = \dfrac{1}{a^2} \cdot \dfrac{b^5}{1}$.

Por lo tanto $\dfrac{a^{-2}}{b^{-5}} = \dfrac{b^5}{a^2}$.

En general, si a y b son números reales y, m y n enteros, entonces (excluida la división entre cero):

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}.$$

Caso 2

Ejemplo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \frac{a^{-2}}{b^{-2}};$$

pero $\dfrac{a^{-2}}{b^{-2}} = \dfrac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}$.

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{b^2}{1}.$$

Por lo tanto $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2} = \dfrac{b^2}{a^2} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2$.

En general, si a y b son números reales cualesquiera y, m y n son enteros, entonces (excluida la división entre cero):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Ejemplo:

Simplifica y expresa los resultados. Emplea sólo exponentes positivos.

a) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-6}$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-6} = \frac{x^{-6}}{y^{-6}} = \frac{\frac{1}{x^6}}{\frac{1}{y^6}};$$

pero $\dfrac{\frac{1}{x^6}}{\frac{1}{y^6}} = \dfrac{1}{x^6} \cdot y^6 = \dfrac{y^6}{x^6} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^6.$

Simplifica y escribe las respuestas. Utiliza sólo exponentes positivos.

a) $\dfrac{8x^{-2}y^3}{6x^{-1}y^{-2}}$

c) $\left(\dfrac{a^{-4}}{b^{5-5}}\right)^{-2}$

b) $\left[\left(\dfrac{10a^3}{5b^5}\right)^3\right]^{-2}$

d) $\dfrac{1}{(x-y)^{-2}}$

Una vez que nos hemos familiarizado con la multiplicación de monomios, resultará más fácil, al utilizar para ello la propiedad distributiva, obtener el producto de un monomio por un polinomio.

Ejemplo 1.

a) Multiplicar x^m por $(x + x^2)$.

Al aplicar la propiedad distributiva, se tiene:

$x^m(x + x^2) = (x^m \cdot x) + (x^m \cdot x^2)$.

Pero, $(x^m \cdot x) = x^{m+1}$ y $(x^m \cdot x^2) = x^{m+2}$, por lo que $x^m(x + x^2) = x^{m+1} + x^{m+2}$.

b) $5x \quad (2x + 3)$

Mediante la propiedad distributiva se obtiene:

$5x\ (2x + 3) = (5x \cdot 2x) + (5x \cdot 3).$

Al usar las propiedades conmutativa y asociativa obtenemos:

$5x\ (2x + 3) = (5 \cdot 2)\ (x \cdot x) + (5 \cdot 3)\ (x).$

Efectuando operaciones:

$5x\ (2x + 3) = 10x^2 + 15x.$

También se pueden omitir los pasos intermedios y operar de la siguiente manera:

a) Multiplicar x^2y por $(3xy - 2x^3y^2 + 5xy^3)$;

$x^2y\ (3xy - 2x^3y^2 + 5xy^3) = 3x^3y^2 - 2x^5y^3 + 5x^3y^4.$

b) $2x^3y^2\ (3xy + 8x^2y^5 - 3xy^2) = 6x^4y^3 + 16x^5y^7 - 6x^4y^4.$

c) $x^m\ (2xy - y^m) = 2x^{m+1}y - x^my^m.$

Multiplica los polinomios siguientes. En los cinco primeros omite los pasos intermedios y en los siguientes indica las propiedades y leyes que aplicaste para llegar al producto:

a) $-8a^pn^q(2a^qn^p - 5an + 6)$

b) $2ax^2\ (bx^3 - cx + 8d)$

c) abcd $(a + b + c + d)$

d) $a^m\ (a - b + 1)$

e) $2x^{10}\ (5x^2 - 6x^2y - y^2 + 2)$

f) $4x^2\ (2x^3y - 3xy^2 + 7)$

g) $3m^2\ (1 - 5m^3n + 6m^2n)$

h) $-x^2\ (3x^3 - x^2 + 5x)$

i) $x^2y^3\ (-xy + x + 3y^2)$

j) $a\ (2b^2 - 3a^2b + 8a^3b^2)$

Veremos ahora cómo multiplicar polinomios.

Ejemplo:

Multiplicar $(x + 3)$ por $(x + 5)$.

Mediante la propiedad distributiva:

$(x + 3)\ (x + 5) = (x \cdot x) + (x \cdot 5) + (3 \cdot x) + (3 \cdot 5) = x^2 + 5x + 3x + 15.$

Al reducir términos semejantes, se tiene:

$(x + 3)\,(x + 5) = x^2 + 8x + 15.$

Este mismo producto se puede resolver de la siguiente manera:

$(x + 3)\,(x + 5) = (x + 3)x + (x + 3)5$, usando la propiedad distributiva del primer factor respecto al segundo.

Al aplicar nuevamente la propiedad distributiva, se tiene:

$(x + 3)\,(x + 5) = (x \cdot x) + (3 \cdot x) + (x \cdot 5) + (3 \cdot 5)$y;

$(x + 3)\,(x + 5) = x^2 + 3x + 5x + 15,$

y al reducir a términos semejantes, obtenemos:

$(x + 3)\,(x + 5) = x^2 + 8x + 15.$

En la resolución de los siguientes ejemplos veremos que se han omitido algunos pasos intermedios.

a) $(x^2 + 2xy - y^2)\,(x + y) = x^3 + 2x^2y - y^2x + x^2y + 2xy^2 - y^3$

$$= x^3 + 3x^2y + xy^2 - y^3.$$

También se puede resolver así:

$(x^2 + 2xy - y^2)\,(x + y) = x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 - xy^2 - y^3$

$$= x^3 + 3x^2y + xy^2 - y^3.$$

A veces, al multiplicar polinomios de este tipo se acostumbra ordenarlos en columnas y cada término de polinomio se multiplica por todos y cada uno de los del otro polinomio, disponiendo los productos parciales de manera que queden en columna los términos semejantes; este procedimiento es análogo al de la multiplicación de números expresados en forma decimal.

Ejemplo:

Multiplica $(3x^3 + 2x^2 + 5x - 6)$ por $(3x - 5)$.

Al ordenar los polinomios en columnas y seguir el procedimiento indicado, se tiene:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 3x^3 & +\,2x^2 & +\,5x & -\,6 \\
 & & & 3x & -\,5 \\
\hline
9x^4 & +\,6x^3 & +\,15x^2 & -\,18x & \\
 & -15x^3 & -\,10x^2 & -\,25x & +\,30 \\
\hline
9x^4 & -\,9x^3 & +\,5x^2 & -\,43x & +\,30
\end{array}$$

Para multiplicar polinomios como éste $(x^2 + 2xy + y^2)(x + y)$, se puede utilizar cualquiera de los procedimientos siguientes.

$$
\begin{array}{r}
x^2 + 2xy + y^2 \\
x + y \\
\hline
x^3 + 2x^2y + xy^2 \\
+ x^2y + 2xy^2 + y^3 \\
\hline
x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
x^2 + 2xy + y^2 \\
x + y \\
\hline
+ x^2 + 2xy^2 + y^3 \\
x^3 + 2x^2y + xy^2 \\
\hline
x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.
\end{array}
$$

Observa que de estos dos procedimientos el más práctico es el primero, aunque en las dos formas se llega a la misma solución.

De las siguientes multiplicaciones, resuelve las cinco primeras siguiendo los pasos correspondientes. Enuncia las propiedades y leyes aplicadas, las siguientes cinco en forma abreviada y las últimas ordenándolas en columnas:

a) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 + b^2)$

b) $(x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$

c) $(a + 3)(y - 5)$

d) $(3y + 7)(2y + 9)$

e) $(x^2 - x + 1)(x + 1)$

f) $(3x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x + 3)(4x^2 - 2x - 2)$

g) $(m + n)(m^2 - m^2n + mn^2 - n^3)$

h) $(x + y)(x^2 + 3xy - y^3)$

i) $(a^2 - a + 1)(a^2 - 1)$

j) $(x^2 + 5)(x - y)$

k) $(x + 3)(3x^5 - 5x^2 + 2x + 6)$

l) $(x^3 + x^2 - 7x + 2)(x^4 - 3x^3 + x^2)$

m) $(y + 3)(y - 8)$

n) $(x^m + 3)(x^2 - y)$

o) $(a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$

p) $(5x^2 + 3x - 2)(6x^2 + 8x + 5)$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES RACIONALES

Para obtener productos de polinomios con coeficientes racionales simplemente, cómo en los casos anteriores, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación y la regla de los signos.

Ejemplo:

Multiplica $\frac{1}{2}a^2$ por $\frac{4}{5}a^3b$.

$\left(\frac{1}{2}a^2\right)\left(\frac{4}{5}a^3b\right)$.

Por la propiedad conmutativa se cambia el orden de los factores $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, a^2, a^3$ y b, y se asocia de diferente manera, esto es:

$$\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{4}{5}a^3b = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}a^2 \cdot a^3b.$$

Al utilizar las propiedades descritas:

$$\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{4}{5}a^3b = \frac{4}{10}a^5b.$$

Se simplifica el coeficiente $\frac{4}{10}$, esto es:

$$\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{4}{5}a^3b = \frac{2}{5}a^5b.$$

Ejemplo: Multiplicar $\left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{3}x - 5\right)$ por $\frac{3}{4}x$.

Al aplicar la propiedad distributiva, se tiene:

$$\left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{3}x - 5\right)\left(\frac{3}{4}x\right) = \left(\frac{4}{5}x^2 \cdot \frac{3}{4}x\right) + \left(5\,\frac{3}{4}x\right).$$

Por las propiedades conmutativa y asociativa se obtiene:

$$\left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{2}{3}x - 5\right)\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{4}x.$$

Ejemplo:

Multiplicar $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2\right)$ por $\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b\right)$

Por la propiedad distributiva, tenemos:

$$\left(\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}a\right) + \left(\frac{1}{2}a^2 \cdot \left(\frac{-3}{2}b\right)\right) + \left(\frac{-1}{3}ab \cdot \frac{2}{3}a\right) + \left(\frac{-1}{3}ab\left(\frac{-3}{2}b\right)\right) + \left(\frac{1}{4}b^2 \cdot \frac{2}{3}a\right) + \left(\frac{1}{4}b^2 \cdot \left(\frac{-3}{2}b\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{4}a^2b - \frac{2}{9}a^2b + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{6}b^2a - \frac{3}{8}b^3 =$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{35}{36}a^2b + \frac{2}{3}ab^2 - \frac{3}{8}b^3.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a\,b + \frac{1}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b\right) = \frac{1}{2}a^3 - \frac{35}{36}a^2b + \frac{2}{3}a\,b^2 - \frac{3}{8}b^3.$$

El mismo polinomio se puede resolver en otra forma:

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a\,b + \frac{1}{4}b^2\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b\right) = \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2\right)\frac{2}{3}a + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a\,b + \frac{1}{4}b^2\right)\left(\frac{-3}{2}b\right).$$

Aplica nuevamente la propiedad distributiva y termina el proceso.

Ahora resuelve el producto y ordena los polinomios en columnas:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2 \\
\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b \\
\hline
\frac{1}{3}a^3 - \frac{2}{9}a^2b + \frac{1}{6}ab^2 \\
\qquad - \frac{3}{4}a^2b \\
\hline
\frac{1}{3}a^3
\end{array}$$

(Terminado, debes llegar a la misma solución).

Determina el producto en los siguientes ejemplo: en los cuatro primeros deberás seguir todos los pasos indicando las propiedades que utilizaste. Los siguientes cuatro ejercicios los resolverás ordenando los polinomios en columnas y los últimos en otro, aplicando la propiedad distributiva.

a) $x - \frac{2}{5}y$ por $\frac{5}{6}y + \frac{1}{3}x$

b) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1\right)\left(\frac{2}{5}x + x\right)$

e) $\left(\frac{3}{8}a^2 + \frac{2}{3}a\right)\left(\frac{1}{5}a^3 - \frac{1}{3}a\right)$

f) $\left(\frac{3}{4}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x\right)$

g) $\left(\frac{5}{4}a^2 - \frac{8}{3}a\right)\left(\frac{1}{5}a + \frac{1}{3}\right)$

h) $\left(\frac{3}{5}a^2 + \frac{2}{3}a + 1\right)\left(\frac{-2}{5} + \frac{1}{2}a\right)$

i) $\left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{3}{4}\right)$

j) $\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{4}\right)$

k) $\left(\frac{3}{8}y^3 - \frac{1}{4}y^2 + 6\right)\left(\frac{3}{4}y^2\right)$

l) $\left(\frac{2}{2}m^n - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}m\right)$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Una vez familiarizados con las operaciones de sumar y multiplicar polinomios, resulta fácil determinar la manera de obtener el cociente de ellos.

Para dividir polinomios, es necesario recordar la ley de los signos, la de los coeficientes para la multiplicación; asimismo el algoritmo, que comúnmente utilizas para dividir aritméticamente.

Empecemos nuestro estudio con la división de polinomios.

Ejemplo:

Dividir $4x^5$ entre $2x^2$.

Pasos a seguir:

a) Se dispone la operación en forma de fracción (dividiendo entre divisor), es decir

$$\frac{4x^5 \leftarrow \text{dividendo}}{2x^2 \leftarrow \text{divisor}}$$

b) Se separan los terminos y al aplicar las leyes de los exponentes se obtiene:

$$\frac{4x^5}{2x^2} = \frac{4}{2} \cdot \frac{x^5}{x^2} = 2x^3.$$

Ejemplo:

Dividir $20a^{-2}b^3c^4$ entre $4a^0b^{-1}c^2$.

Siguiendo el mismo procedimiento del ejemplo anterior se tiene:

$$\frac{20a^{-2}b^3c^4}{4a^0b^{-1}c^2} = \frac{-20}{4} \cdot \frac{a^{-2}}{a^0} \cdot \frac{b^3}{b^{-1}} \cdot \frac{c^4}{c^2} = \frac{-5b^4c^2}{a^2}.$$

Ejemplo:

Dividir $-15x^{-2}y^3z^6$ entre $20x^2yz^{-2}$.

Siguiendo los pasos anteriores:

$$\frac{-15x^{-2}y^3z^6}{20x^2yz^{-2}} = \frac{-15}{20} \cdot \frac{x^{-2}}{x^2} \cdot \frac{y^3}{y} \cdot \frac{z^6}{z^{-2}}$$

Simplificando.

$$\frac{-15\,x^2 y\,z^{-2}}{20\,x^2 y\,z^{-2}} = \frac{-3}{8}\cdot\frac{1}{x^4}\cdot y^2\cdot z^8 =$$

$$= -\frac{3\,y^2 z^8}{4\,x^4}.$$

Ejemplo:

Dividir $10\,a^3\,b^5\,c$ entre $-2\,a^2 b$.

$$\frac{10\,a^3\,b^5\,c}{-2a^2 b} = -5ab^4c.$$

Aquí se observa que cuando en el dividendo hay una literal que no existe en el divisor, en este caso la letra c, dicha letra aparece en el coeficiente. Lo mismo ocurre si c se cuestiona en el divisor con exponente cero ya que tendríamos:

$$\frac{c}{c^0} = c^{1-0} = c^1 = c.$$

Ejemplo:

Dividir $-a^m\,b^n\,c^p$ entre $5a\,b^2\,c^2$.

$$\frac{-a^m\,b^n\,c^p}{5a\,b^2\,c^2} = \frac{-1}{5}a^{m-1}\,b^{n-2}\,c^{p-2}.$$

Forma de comprobar la división de monomios

Para comprobar una división de monomios se multiplica el cociente por el divisor, el resultado debe ser el dividendo:

Ejemplo:

$$\frac{6\,x^3}{3\,x} = 2x^2.$$

Porque $(2x^2)\,(3x) = 6x^3$.

Obtén el cociente en cada una de las siguientes divisiones.

En las cinco primeras determina los pasos que se siguen, tal como se hizo en los ejemplos y los restantes en forma simplificada, pero comprobando la solución.

a) $5x^4$ entre $-6xy^2$

b) $-10x^6$ entre $5x^2y$

c) $18a^6b^4c^2$ entre $2ab^2c^2$

d) $-108a^7b^8c^6$ entre $-20a^6b^2$

e) $25x^2y^5$ entre $5x^4y^2$

f) $3x^5y^4z^2$ entre x^5y^2z

g) $-9x^3y^2m^5$ entre m^2

h) $16a^8b^2c^5$ entre $4a^2bc^2$

i) y^6z^2 entre x^3y^2z

j) $a^5b^2c^8$ entre $a^ny^kc^3$

l) $-10x^{-3}y^0$ entre $-2xy^5$

k) $25x^{-1}y^5$ entre $5x^2y^{-2}$

m) $12a^{-3}b^2c^0$ entre $-6a^2b^{-6}c^5$

n) $4x^2y^{-2}z^0$ entre $2z^2$

División de un polinomio entre un monomio

Aquí se utiliza la propiedad distributiva para expresar el cociente de un polinomio y un monomio como suma de fracciones, como en polinomios, o como una suma de un polinomio y una o más fracciones, es decir,

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Ejemplo:

a) Dividir $20x^3 + 25x^2 - 15x$ entre $5x^4$

Aplicando la propiedad distributiva se obtiene:

$$\frac{20x^3 + x^2 - x}{5x^4} = \frac{20x^3}{5x^4} = \frac{25x^2}{5x^4} - \frac{15x}{5x^4} = \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3};$$

b) $$\frac{a - 2a^2 - a^5}{a} = \frac{a}{a} - \frac{2a^2}{a} - \frac{a^5}{a} = 1 - 2a - a^4;$$

c) $$\frac{12m^4 + 4m^2 - m + 6}{4m^2} = \frac{12^4}{4m^2} + \frac{4m^2}{4m^2} - \frac{m}{4m^2} + \frac{6}{4m^2} = 3m^2 + 1 - \frac{1}{4m} + \frac{6}{4m^2}.$$

Como sabemos, la comprobación de la división se obtiene al multiplicar el cociente por el divisor.

Comprobaremos por medio de una multiplicación el primero de los casos anteriores.

En el inciso *a*.

Si multiplicamos el cociente $\left(\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$ por el divisor $5x^4$, obtenemos el dividendo:

$$5x^4\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\frac{20x^4}{x}+\frac{25x^4}{x^2}-\frac{15x^4}{x^3}=20x^3+25x^2-15x, \text{ que es el dividendo.}$$

1) Comprueba en los incisos b y c

2) Procediendo como en el ejemplo, encuentra el cociente en cada de la siguientes divisiones y compruébalo.

Dividir:

a) $3x^2y^3-5a^2x^4$ entre $-3x^2$

b) $3a^3-5ab^2-6a^2b^3$ entre $5a$

d) $6m^3-8m^2n+20mn^2$ entre $-2m$

e) $x^{m+2}-5x^m+6x^{m+1}-x^{m-1}$ entre x^{m-2}

f) $8m^9m^2-10m^7n^4-20m^5n^6+12m^3n^8$ entre $2m^2$

g) $-5m^2y^5z^3+10xy^2z^3-20^3y^3z^3$ entre $-5xy^2z^3$

h) $3x^ny^2z^3-9x^2y^3z+12x^{n+1}y^5z$ entre $3x^nyz$

Obtención del cociente de polinomio entre otro polinomio

La división de polinomios se puede efectuar de la misma manera que la división aritmética, con grandes números, usando el algoritmo de Euclides; por ejemplo, dados los números 632 y 23, obtengamos el cociente por medio del algoritmo citado, es decir,

$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ 23 & 632 \\ & -46 \\ & 172 \\ & -161 \\ & 11 \end{array}$$

(63 entre 23 da 2, como 2 por 23 es igual a 46, el residuo parcial es 17).

(Ahora, 172 entre 23 da 7 como 7 por 23 es igual a 16 y el residuo parcial es 11).

Comprobación.

Por lo tanto $632 = 23 \times 27 + 11$,

dividiendo divisor por cociente más residuo.

Ahora se obtendrá el cociente polinomios, aplicando el algoritmo de Euclides.

Para empezar a dividir un polinomio entre otro, se disponen los términos del dividendo y divisor en orden decreciente respecto al grado de una literal. Se termina el proceso de división cuando el grado del residuo, en una variable es menor que el del divisor o cuando el residuo es cero.

Ejemplo:

Dividir $6x^2 + 3x + 2$ entre $2x+3$.

Pasos a seguir:

1) Se divide el primer término del divisor.

$$\frac{6x^2}{2x} = 3x \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 3x \\ \cline{2-2} 2x + 3 & 6x^2 + 3x + 2\,. \end{array}$$

2) Se multiplica este primer término del cociente por el divisor y se escribe el inverso aditivo de su producto.

$$3x\,(2x + 3) = 6x^2 - 9x \qquad \begin{array}{r|l} & 3x \\ \cline{2-2} 2x + 3 & 6x^2 + 3x + 2 \\ & -6x^2 - 9x\,. \end{array}$$

3) Se suma el dividendo con el polinomio obtenido.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \cline{2-2} 2x + 3 & 6x^2 + 3x + 2 \\ & -6x^2 - 9x \\ \cline{2-2} & \qquad -6x + 2\,. \end{array}$$

4) Se divide el primer término de esta suma entre el primer término del divisor.

$$-\frac{6x}{2x} = -3 \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 3x \quad -3 \\ \cline{2-2} 2x + 3 & 6x^2 + 3x + 2 \\ & -6x^2 - 9x \\ \cline{2-2} & \qquad -6x + 2\,. \end{array}$$

5) Se multiplica el segundo término del cociente por el divisor y se escribe el inverso aditivo de este producto.

$$-3\,(2x + 3) = -6x - 9 \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 3x \quad -3 \\ \cline{2-2} 2x + 3 & 6x^2 + 3x + 2 \\ & -6x^2 - 9x \\ \cline{2-2} & \qquad -6x + 2 \\ & \qquad\;\; 6x + 9\,. \end{array}$$

6) Para terminar, sumamos.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 3 \\
\hline
2x + 3 & 6x^2 + 3x + 2 \\
 & -6x^2 - 9x \\
\hline
 & \quad -6x + 2 \\
 & \quad\ \ 6x + 9 \\
\hline
 & \qquad\quad 11\,.
\end{array}
$$

Por lo tanto $6x^2 + 3x + 2 = (2x + 3)(3x - 3) + 11$.

Dividiendo igual a divisor por cociente más residuo.

Ejemplo:

Dividir $2x^3 - 2 - 4x$ entre $2 + x$, sin mencionar los pasos del algoritmo.

Se disponen los términos del dividendo y del divisor en orden decreciente y como en el dividendo falta el término x^2 se debe dejar un lugar para este término.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 4x + 4 \\
\hline
x + 2 & 2x^3 \qquad\quad - 4x - 2 \\
 & -2x^3 - 4x^2 \\
\hline
 & \qquad -4x^2 - 4x - 2 \\
 & \qquad\ \ 4x^2 + 8x \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 4x - 2 \\
 & \qquad\qquad -4x - 8 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad -10\,.
\end{array}
$$

Por lo tanto, $2x^3 - 4x - 2 = (x + 2)(2x^2 - 4x + 4) + (-10)$.

2) Aplica el algoritmo de Euclides sin mencionar los pasos y resuelve las siguientes divisiones de polinomios:

a) $6n^2 + 11n - 35$ entre $3n - 5$

b) $4 - x^3 - 4x$ entre $2 + x$

c) $b^4 + 4b^3 + 10b^2 + 12b + 9$ entre $b^2 + 2b + 3$

d) $x^2 + 4x - 14$ entre $x + 6$

e) $8x^3 - 4x + 1$ entre $2x - 2$

División de monomios entre monomios

Ejemplo:

Dividir $\frac{5}{2}a^3$ entre $\frac{1}{3}a^2$, esto es:

$$\frac{5\,a^3}{2} : \frac{a^2}{3}.$$

Ahora vamos a multiplicar el dividendo por el inverso multiplicando del divisor. El inverso multiplicativo de $\frac{1}{3}a^{2}$ es $\frac{3}{a^2}$.

Por lo tanto,

$$\frac{5a^3}{2} : \frac{1}{3a^2} =$$

$$\frac{5a^3}{2} \cdot \frac{3}{a^2} = \frac{15a^3}{2a^2}.$$

Por las leyes de los exponentes, se tiene:

$$\frac{5a^3}{2} \cdot \frac{3}{a^2} = \frac{15}{2}a.$$

División de polinomios entre monomios

Se puede proceder del mismo modo que en el campo de los números racionales; por ejemplo:

Dividir $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{8}x^2y$ entre $\frac{2}{3}x$.

Se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{8}x^2y\right)\frac{3}{2x}.$$

Ahora se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación.

$$\frac{3x^3}{6x} - \frac{9x^2y}{16x}.$$

Simplificando términos, se obtiene:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{9xy}{16}.$$

Por lo tanto, $\left(\frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{3}{8}x^2y\right) : \frac{2x}{3} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{16}xy.$

Comprobación:

Se multiplica el divisor por el cociente, para obtener el dividendo, esto es:

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{8}x^2y = \frac{2x}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{9}{16}xy\right) = \frac{2x^3}{6} - \frac{18x^2y}{48} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{8}x^2y.$$

(dividiendo = divisor por cociente)

Procede como en los ejemplos anteriores y divide los siguientes polinomios. Comprueba la solución:

1) $\frac{3}{8}a^5b^4$ entre $\frac{2}{5}a^3b^2$

2) $\frac{3}{4}x^5y^2z$ entre $\frac{2}{3}x^3y^4z$

3) $\frac{2}{7}a^3 - \frac{1}{2}a^2b^3 + \frac{3}{8}ab^2$ entre $\frac{3}{5}a^2b^2$

4) $\left(\frac{3}{4}y^3 - \frac{2}{3}x^2y^2 + \frac{1}{2}xy\right)$

5) $\left(\frac{3}{4}a^3b^4c^2\right)$ entre $\frac{5}{7}a^2bc^3$

Para dividir polinomio entre polinomio con coeficientes racionales se aplica el algoritmo de Euclides.

Ejemplo:

Dividir $\frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2$ entre $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y.$

Pasos que se siguen:

1. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x^2 \\ \hline \frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y & \frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 \end{array}$$

2. Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y se escribe el inverso aditivo de ese producto.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}x^2 \\ \hline
\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y & \frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 \\
 & -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2y
\end{array}
$$

3. Se suma el dividendo con el polinomio obtenido.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}x^2 \\ \hline
\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y & \frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 \\
 & -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2y \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -\frac{2}{9}x^2y + \frac{4}{15}xy^2
\end{array}
$$

4. Se divide el primer término de esta suma entre el primer término del divisor.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy \\ \hline
\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y & \frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 \\
 & -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2y \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -\frac{2}{9}x^2y + \frac{4}{15}xy^2
\end{array}
$$

5. Se multiplica el segundo término del cociente por el divisor y se escribe el inverso aditivo de este producto.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy \\ \hline
\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y & \frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 \\
 & -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2y \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad -\frac{2}{9}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 \\
 & \qquad\quad \frac{2}{9}x^2y - \frac{4}{15}xy^2
\end{array}
$$

6. Sumando los dos polinomios.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy \\
\cline{2-2}
\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y & \frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 \\
 & -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2y \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad -\frac{2}{9}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 \\
 & \qquad\qquad \frac{2}{9}x^2y - \frac{4}{15}xy^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0 \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto, $\frac{1}{3}x^3 - \frac{28}{45}x^2y + \frac{4}{15}xy^2 = \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}y\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy\right)$.

Compruébalo verificando el producto.

Efectúa las operaciones siguientes siguiendo los pasos propuestos.

a) $\frac{1}{3}a^3 - \frac{35}{36}a^2 + \frac{2}{3}ab^2 - \frac{3}{8}b$ entre $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{4}b^2$

b) $\frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{8}x^2y - y^3 + \frac{5}{3}xy^2$ entre $\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}y$

RECAPITULACIÓN

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Son modelos matemáticos formados por letras y/o números relacionados a a través de operaciones

Numérico → Factores
Literal → Factores
Absoluto → Grado
Respecto a las variables → Grado

Los elementos principales de un término son: Factores, Grado

Las expresiones algebraicas pueden ser: → monomios; → polinomios → binomios, polinomios

OPERACIONES

– Suma de términos semejantes

– Se le llama reducción de términos

Suma de polinomios. Aplica las propiedades de los números reales.

Sustracción de polinomios. Es importante identificar el inverso aditivo.

Multiplicación de polinomios. Aplica las propiedades de los números reales y obedece las leyes de los exponentes.

División de polinomios. Aplica la ley de los signos, la de los exponentes, la ley de los coeficientes para la multiplicación y el algoritmo de Euclides.

En todos los casos es importante tomar en cuenta las reglas aplicables a los signos de agrupación

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Con el fin de que conozcas el nivel de tu aprendizaje realiza las siguientes actividades:

1) Encuentra una expresión algebraica para las siguientes cantidades.

a) El perímetro de un rectángulo de largo x y ancho y.

b) El área de un paralelepípedo con las siguientes dimensiones:

largo a , ancho b, altura c

c) La cantidad de dinero que totalizan n billetes de 50,000 pesos.

d) La cantidad de dinero que totalizan m billetes de 10,000 pesos y n billetes de 20,000 pesos.

e) La cantidad a cobrar por un disco que costaba x pesos si el vendedor ofrece un descuento del 30%.

2. Con tus propias palabras escribe los pasos a seguir para resolver adiciones y sustracciones de polinomios.

3. Mediante las propiedades de los números reales, las leyes de los exponentes y la regla de los signos, has obtenido los métodos para multiplicar y dividir polinomios, de tal manera que los ejercicios que se te proponen a continuación, te servirán para reafirmar tu aprendizaje. Resuélvelos e indica las propiedades y reglas que utilices.

a) $\dfrac{6a^{-2}b^{3}}{15a^{-1}b^{-2}}$

b) $\left[\left(\dfrac{4a^{2}}{2b^{5}}\right)^{2}\right]^{-1}$

c) $(-2x^2 + y^5 - z^3)\ (4x^2y)$

d) $(8x^m y^n + 2x^2yz + 3x^m z^3)\ (-2x^2y)$

e) $(3x^2 + 6y - z)\ (5x^3 - 6)$

f) $(4a^3 b^4 c - 2a^2 b^n c^5)\ (2a^2 - 3abc)$

g) $\left(\frac{3}{8} a^2\right)\ \left(\frac{1}{5} a^5 b\right)$

h) $\left(\frac{5}{2} x^5 y\right)\ \left(\frac{2}{7} x^n y^5\right)$

i) $\left(\frac{3}{4} a^2 b + \frac{2}{3} a^5 b^2 c^2\right)\ \left(\frac{5}{3} x^2\right)$

j) $\left(\frac{5}{4} y^2 z - \frac{1}{3} y^3 z^2\right)\ \left(\frac{3}{8} y^5\right)$

k) $\left(\frac{1}{2} x^2 + 3y\right)\ \left(\frac{3}{4} x - \frac{3}{5} xy\right)$

l) $4x^8 : 2x^2$

m) $(6xy^2 - 3x^3 + 5xy^2) : 3x^2 y$

n) $(10x^2 y + 5x + 2)\ (3x^2) : 5x$

Aplica el algoritmo de Euclides a los siguientes polinomios:

o) $x^2 + 6x + 10\ ;\ x + 2$

p) $n^2 - 7n - 9\ ;\ n + 1$

q) $\frac{4}{3} a^5$ entre $\frac{2}{3} a$

r) $\left(\frac{5}{3} x^2 y^5 + \frac{2}{3} xy^2 - \frac{1}{4} xy\right)$ entre $\frac{5}{3} x^2 y$

s) $\left(\frac{1}{2} m^5 n + \frac{6}{5} m^3 n^2 + \frac{3}{8} m\right)$ entre $\frac{2}{3} m^2 n^3$

t) $\left(\frac{-3}{8} a^4 + \frac{1}{2} a^3 b^2 - b^3\right)$ entre $\frac{6}{5} a^2 b^3$

u) $\left(\frac{1}{3} x^2 + \frac{7}{10} xy - \frac{1}{3} y^2\right)$ entre $\left(x - \frac{2}{5} x\right)$

v) $\left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{35}{36} x^2 y + \frac{2}{3} xy^2 - \frac{3}{8} y^3\right)$ entre $\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} xy + \frac{1}{2} y^2\right)$

w) $\left(\frac{1}{16} a^3 - \frac{5}{8} a^2 b - b^3 + \frac{5}{3} ab^2\right)$ entre $\left(\frac{1}{4} a - \frac{3}{2} b\right)$

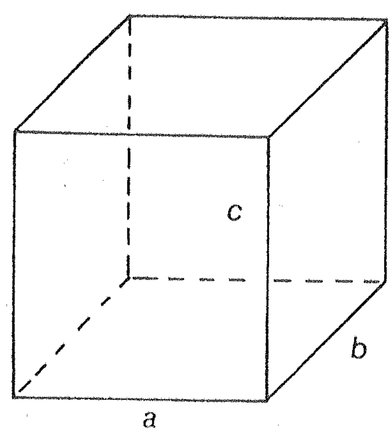
LINEAMIENTOS DE AUTOEVALUACIÓN

Compara tus respuestas obtenidas en las Actividades de consolidación. Si en alguna no llegaste al mismo resultado, verifícala y en caso necesario vuelve a revisar el tema

1. *a*) $x + x + y + y = 2x + 2y$

   b) El área de un paralelepípedo es la suma de las áreas de sus caras:

   $ab + ab + bc + bc + ac + ac = 2ab + 2bc + 2ac.$



   c) 50 000n

   d) 10 000 m + 20 000n

   e) El descuento es 0.3x, entonces la cantidad a cobrar por el disco es:

   $x - 0.3x = (1 - 0{,}3)x = 0.7x.$

2. Si entendiste esta parte del tema habrás observado la necesidad de seguir una serie de pasos para resolver en forma adecuada las operaciones de adición o sustracción de polinomios, sin que los pasos requieran un orden fijo, sino más bien la habilidad que tengas en el manejo de las expresiones algebraicas.

En la realización de las actividades de consolidación, debiste considerar que:

Los polinomios se ordenan en forma decreciente.

Hacer que los polinomios sean completos.

Agrupar los términos semejantes (vertical u horizontal).

Sumar o sustraer los coeficientes.

En la sustracción, se debe obtener el inverso aditivo del sustraendo.

3. Obtener el producto y el cociente de polinomios son operaciones que requieren de la aplicación de las propiedades y leyes que permiten encontrar la solución deseada.

Los resultados de los ejercicios propuestos en las actividades de consolidación son los siguientes:

a) $\dfrac{6a^{-2}b^{3}}{15a^{-1}b^{-2}} = \dfrac{2b^{5}}{5a}$

b) $\left[\left(\dfrac{4a^{2}}{2b^{2}}\right)^{2}\right]^{-1} = \dfrac{b^{10}}{4a^{4}}$

c) $(-2x^{2} + y^{5} - z^{3})\ (4x^{2}y) = -8x^{4}y + 4x^{2}y^{6} - 4x^{2}yz^{3}$

d) $(8x^{m}y^{n} + 2x^{2}yz + 3x^{m}z^{3})\ (2x^{2}y) = 16x^{m+2}y^{n+1} + 4x^{4}y^{2}z + 6x^{m+2}yz^{3}$

e) $(3x^{2} + 6y - z)\ (5x^{3} - 6) = 15x^{5} - 30x^{3}y - 5x^{3}z - 18x^{2} - 36y + 6z$

f) $(4a^{3}b^{4}c - 2a^{2}b^{n}c^{5})\ (2a^{2} - 3abc) = 8a^{5}b^{4}c - 4a^{4}b^{n}c^{5} - 12a^{4}b^{5}c^{2} + 6a^{3}b^{n+1}c^{6}$

g) $\left(\dfrac{3}{8}a^{2}\right)\ \left(\dfrac{1}{5}a^{5}b\right) = \dfrac{3a^{7}b}{40}$

h) $\left(\dfrac{5}{2}x^{5}y\right)\ \left(\dfrac{2}{7}x^{n}y^{5}\right) = \dfrac{5}{7}x^{5+n}y^{6}$

i) $\left(\dfrac{3}{4}a^{2}b + \dfrac{2}{3}a^{5}b^{2}c^{2}\right)\ \left(\dfrac{5}{3}x^{2}\right) = \dfrac{5}{4}a^{2}bx^{2} + \dfrac{10}{9}a^{5}b^{2}c^{2}x^{2}$

j) $\left(\dfrac{5}{4}y^{2}z - \dfrac{1}{3}y^{3}z^{2}\right)\ \left(\dfrac{3}{8}y^{5}\right) = \dfrac{15}{32}y^{7}z - \dfrac{1}{8}y^{8}z^{2}$

k) $\left(\dfrac{1}{2}x^{2} + 3y\right)\ \left(\dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{5}xy\right) = \dfrac{3}{8}x^{3} - \dfrac{3}{10}x^{3}y + \dfrac{9}{4}xy - \dfrac{9}{5}xy^{2}$

l) $4x^{8} : 2x^{2} = 2x^{6}$

m) $(6xy^2 - 3x^3 + 5xy^2) \div 3x^2y = \frac{2y}{x} - \frac{x}{y} - \frac{5y}{3x}$

n) $(10x^2y + 5x + 2)(3x^2) \div 5x = 6x^3y + 3x^2 + \frac{6}{5}x$

o) $(x^2 + 6x + 10) \div (x + 2) = x + 4$ cociente $= 2$.

p) $(n^2 - 7n - 9) \div (n + 1) = n - 8$ cociente $= -1$.

q) $\frac{4}{3}a^5 \div \frac{2}{3}a = 2a^4$

r) $\left(\frac{5}{3}x^2y^5 + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{1}{4}xy\right) \div \frac{5}{3}x^2y = y4 + \frac{2y}{5x} - \frac{3}{20x}$

s) $\left(\frac{1}{2}m^5n + \frac{6}{5}m^5n^2 + \frac{3}{8}m\right) \div \frac{2}{3}m^2n^3 = \frac{3m^3}{4n^2} + \frac{9m^3}{5n} + \frac{9}{16mn^3}$

t) $\left(\frac{-3}{8}a^4 + \frac{1}{2}a^3b^2 - b^3\right) \div \frac{6}{5}a^2b^3 = \frac{5a^2}{16b^3} + \frac{5a}{12b} - \frac{5}{6a^2}$

u) $\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{10}xy - \frac{1}{3}y^2\right) \div \left(x - \frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y$

v) $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3\right) \div \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{2}y^2\right) = \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y$

w) $\left(\frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{8}a^2b - b^3 + \frac{5}{3}ab^2\right) \div \left(\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b\right) = \frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2$

BIBLIOGRAFÍA

Alfonse Gobran: *Álgebra*. Iberoamericana, México: 1986.

Baldor A.: *Álgebra elemental*. Ediciones CODICE, Madrid, 1974.

Barnett, S.A y Nolasco: *Álgebra elemental. Estructura y aplicaciones*. McGraw-Hill, México, 2da. ed., 1986.

Britton y Bello: *Matemáticas contemporáneas*.

Polciani *et al*.: *Álgebra moderna*. Publicaciones Culturales, México, 1967.

Perelman Y.: *El divertido juego de las Matemáticas*. Círculo de lectores, Ediciones Martínez Roca, Barcelona, 1968.

Phillips *et al*.: *Álgebra con aplicaciones*. Harla, México, 1983.

Rees P.K *et al*.: *Álgebra*. McGraw-Hill, México, 1980.