COLEGIO DE BACHILLERES

DIRECCIÓN DE PLANEACIÓN ACADÉMICA

COORDINACIÓN DEL SISTEMA DE ENSEÑANZA ABIERTA

MATEMÁTICAS I

FASCÍCULO IV

LENGUAJE ALGEBRAICO: OPERATIVIDAD, PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

El Colegio de Bachilleres ha preparado este material esperando que el estudio constante y las aportaciones del personal académico promuevan la construcción de un aprendizaje más completo, pues éste exige responsabilidad y compromiso de quienes participan en esta experiencia.

Este fascículo se refiere al tema *Productos notables y factorización*, que corresponde a la asignatura de Matemáticas I. Contiene, entre sus elementos, un Índice, un Propósito y una Introducción, que te permitirán conocer tanto la organización del contenido como lo que se espera lograr al finalizar su estudio.

Entre los contenidos se incluyen actividades, reflexiones, problemas y ejemplos. Es importante que los leas cuidadosamente y reflexiones sobre ellos, ya que te permitirán ir construyendo tu conocimiento; por tanto, te recomendamos no pasar a otro subtema antes de resolver cada problema y consultar tus dudas.

Al final de cada tema están las Actividades de consolidación, mediante las cuales aplicarás lo aprendido y, al compararlas con los Lineamientos de autoevaluación, determinarás tu nivel de aprendizaje.

ESQUEMA DE CONTENIDO

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

- PRODUCTOS NOTABLES
- FACTORIZACIÓN
- SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS RACIONALES
- OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

INTRODUCCIÓN

Con frecuencia enfrentamos problemas en los que se presentan ciertos casos de multiplicación de un determinado tipo, por lo que es conveniente aprender a escribir los productos rápidamente, o, dado el producto, encontrar sus factores. Vamos a estudiar en este tema los diferentes tipos de productos notables y los distintos casos de factorización que condensan los problemas anteriores.

Dentro del campo de las matemáticas, saber desarrollar los productos notables y factorizar una expresión algebraica es de mucha importancia, por cuanto que en todas las áreas del conocimiento siempre están presentes a través de expresiones algebraicas.

Un ejemplo de lo anterior lo encontramos en un problema de aplicación en Medicina.

"La velocidad de la sangre que se encuentra a r centímetros del centro de una arteria está dada por $V = C(R^2 - r^2)$, donde C es una constante y R el radio de la arteria."

Esto significa que a medida que nos alejemos del centro de la arteria la velocidad del flujo disminuye.

Supóngase que al suministrar un medicamento la arteria se contrae de un radio R a otro $(R - r)$. Esto significa que la velocidad de la sangre dentro de la arteria va a aumentar. Para determinar cuánto aumenta dicha velocidad conforme el radio de la arteria se reduce, habría que calcular el siguiente cociente y así poder clasificar adecuadamente el medicamento:

$$\frac{V}{R - r} = \frac{C(R^2 - r^2)}{R - r}.$$

La herramienta matemática sería la división de polinomios. Sin embargo, la solución de este problema presenta cierta complejidad dado el siguiente modelo:

$$R - r\;\overline{)\,C(R^2 - r^2)}$$

Como no hemos realizado este tipo de divisiones, lo que primero necesitamos es aplicar al dividendo la multiplicación de polinomios por medio de la propiedad distributiva, de tal forma que la división quede indicada como la hemos aprendido.

$$R - r\;\overline{)\,C(r^2 - r^2)} \quad = \quad R - r\;\overline{)\,Cr^2 - Cr^2}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & CR + Cr \\
\cline{2-2}
R - r & Cr^2 - Cr^2 \\
 & \underline{-Cr^2 \qquad +CrR} \\
 & 0 \quad - Cr^2 + CrR \\
 & \quad \underline{+ Cr^2 - CrR} \\
 & \qquad 0 + 0
\end{array}
\qquad
\frac{CR^2}{R} = CR
\qquad
\frac{CrR}{R} = Cr
$$

Por tanto: $\dfrac{V}{R-r} = \dfrac{C(R^2 - r^2)}{R-r} = CR + Cr = C(R + r).$

Si se factoriza, esta operación se efectuaría de la manera siguiente:

$$\frac{V}{R-r} = \frac{C(R^2 - r^2)}{R-r} = \frac{C(R + r)(R - r)}{R - r} = C(R + r).$$

Con base en esto, podemos percatarnos que es necesario que conozcas y manejes adecuadamente los productos notables y la factorización, dado que éstos pueden presentarse en la solución de problemas en diversas áreas del conocimiento como en Ingeniería, Física, Química, Biología, Economía, etc., por mencionar algunas, y la Medicina, que ya se ejemplificó.

– la simplificación de la expresión racional $\frac{x^2 - 6x - 9}{x^2 - 7x + 12}$?

Antes de comenzar la lectura de este tema, intenta responder estas preguntas por ti mismo. Si puedes responderlas sin la lectura del tema te felicitamos; si no, te darás cuenta que solamente tienes algunos o ningún conocimiento sobre los productos notables, factorización y simplificación de fracciones racionales y que para contestar las preguntas satisfactoriamente es necesario seguir avanzando en el estudio de este tema. Te recomendamos que lo leas cuidadosamente y adelantes al revisar cada concepto buscando las relaciones que existen entre ellos.

PRODUCTOS NOTABLES

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN

La expresión dada $(x+a)(x+b)$ es un producto de dos binomios, donde puedes ver que x es un término que está en ambos binomios, por lo cual se dice que es término común. Los términos $+a$ y $+b$ son términos no comunes.

Por lo anterior, a la expresión $(x+a)(x+b)$ se le denomina producto de dos binomios con término común.

Observa la siguiente tabla:

Productos de dos binomios con un término común	Término común	Términos no comunes
1. $(x+4)(x+10)$	x	$+4$ y $+10$
2. $(y+3)(y+8)$	y	$+3$ y $+8$
3. $(k+6)\left(k-\frac{2}{3}\right)$	k	$+6$ y $-\frac{2}{3}$
4. $(2x+7)(2x-2)$	$2x$	$+7$ y -2
5. $(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-5)$	$\sqrt{x}$	$+6$ y -5
6. $(z^2+11)(z^2+1)$	z^2	$+11$ y $+1$
7. $(x^3-3)(x^3+10)$	x^3	-3 y $+10$
8. $(2y^2+8)(2y^2-6)$	$2y^2$	$+8$ y -6
9. $(x^2+3)(x^2-7)$	x^2	$+3$ y -7
10. $(-2-y)(-9-y)$	$-y$	-2 y -9

Si a los ejemplos 1, 3, 5, 7, 9 se les aplica el procedimiento para multiplicar dos binomios, se tiene:

1. $(x+4)(x+10)$
$$\begin{aligned} &= x^2+10x+4x+40 \\ &= x^2+[(+10)+(+4)]x+40 \\ &= x^2+14x+40. \end{aligned}$$

3. $(k+6)\left(k-\frac{2}{3}\right)$
$$\begin{aligned} &= k^2-\frac{2}{3}k+6k-4 \\ &= k^2+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)+(+6)\right]k-4 \\ &= k^2+\frac{16}{3}k-4. \end{aligned}$$

5. $(x^2 - 1)(x^2 - 7)$

6. $(a^4 + 8)(a^4 - 1)$

7. $(ab + 5)(ab - 6)$

8. $(a^5 - 2)(a^5 + 7)$

9. $(xy^2 - 9)(xy^2 + 12)$

10. $(a^x - 3)(a^x + 8)$.

Obtener el producto de dos binomios con un término común por simple inspección requiere aplicar la regla dada que permita de manera inmediata conocer dicho producto.

Los resultados de los ejercicios propuestos en la actividad anterior son los siguientes:

1. $x^2 + 8x + 15$

2. $x^2 + 3x - 10$

3. $n^2 - 9n - 190$

4. $4x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}$

5. $x^4 - 8x^2 + 7$

6. $a^8 + 7a^4 - 8$

7. $a^2b^2 - ab - 30$

8. $a^{10} + 5a^5 - 14$

9. $x^2y^4 + 3xy^2 - 108$

10. $a^{2x} + 5a^{2x} - 24$.

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CONJUGADOS

El producto 103 x 97, que es una operación aritmética, se puede escribir como (100 + 3)(100 – 3) dado que 103 = 100 + 3 y 97 = 100 – 3. Quedando el producto 103 x 97 = (100 + 3)(100 – 3), observamos que el producto dado se puede escribir como el producto de dos binomios, los cuales tienen un término común (100) y un término (3) que difieren sólo en el signo (uno es positivo y el otro es negativo).

De esta manera, también en Álgebra se presenta este tipo de expresiones, por ejemplo:

$$(x - 4)(x + 4),$$

donde x es el término común y los otros términos sólo difieren en el signo.

$$(y - k)(y + k),$$

donde y es el término común y los otros términos sólo difieren en el signo.

$$\left(\frac{1}{2} + 3a\right)\left(-\frac{1}{2} + 3a\right)$$

donde $3a$ es el término común y los otros términos sólo difieren en el signo.

En este tipo de expresiones los términos que sólo difieren en el signo se les llama conjugados o simétricos.

Analiza los siguientes ejemplos y observa cómo se aplica este modelo.

1. $(6 - 3x)(6 + 3x) = 36 - 9x^2$.

2. $\left(6x^2 - \frac{2}{5}\right)\left(-6x^2 - \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{25} - 36x^4$.

De este último ejemplo puedes observar que los términos idénticos no necesariamente son los primeros de los binomios, por lo que es importante, antes de desarrollarlos, identificar cuál es su parte idéntica y cuál la simétrica.

Trata de resolver las siguientes actividades:

$(a + b)(a - b) = a^2 - 0$.

Determina si se aplicó correctamente la regla del producto notable. ¿Cuál fue el error?

$\left(xy + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - xy\right) = -\frac{4}{9} - x^2y^2$.

Otra vez determina si se aplicó correctamente la regla del producto notable. ¿Cuál fue el error?

Aplica la regla y resuelve los siguientes ejercicios, después compara tus respuestas con las de la derecha.

	RESPUESTAS:
$(a - x)(x + a) =$	$a^2 - x^2$
$(m - n)(m + n) =$	$m^2 - n^2$
$(-3a + 1)(3a + 1) =$	$1 - 9a^2$
$(y^3 - 2y)(y^3 + 2y) =$	$y^6 - 4y^2$
$(x^m - y^n)(x^m + y^n) =$	$x^{2m} - y^{2n}$

EL CUADRADO DE UN BINOMIO

- Interpretación del producto notable.

Un agricultor necesita conocer la superficie del terreno que va a sembrar y sólo conoce su dimensión $x + y$ por lado.

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - 2xy + y^2.$$

Comprueba que este producto notable se dedujo correctamente desarrollando el binomio $(x-y)^2 =$ mediante la multiplicación de polinomios.

Como te darás cuenta, el primer término resulta positivo, el segundo negativo y el tercero también positivo, a diferencia de los términos del desarrollo del cubo de la suma de dos términos, los cuales son todos positivos. Trata de obtener el modelo adecuado.

En cuanto obtengas el modelo, enuncia la forma de identificarlo, tal como se hizo para el binomio $(x+y)^2$.

Para aplicar el producto notable anterior, desarrollaremos binomios al cuadrado que requerirán simplificarse mediante operaciones combinadas con expresiones algebraicas.

Ejemplo 1. Desarrollar el siguiente binomio:

$$\begin{aligned}(m+n)^2 &= [m]^2 + 2[m]\{n\} + \{n\}^2\\ &= m^2 + 2mn + n^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Desarrollar el siguiente binomio:

$$\begin{aligned}\left(2x^3 - \frac{2}{3}\right)^2 &= [2x^3]^2 - 2[2x^3]\left\{\frac{2}{3}\right\} + \left\{\frac{2}{3}\right\}^2\\ &= 4x^6 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Desarrollar el siguiente binomio:

$$\begin{aligned}(4x^n + 2y^m)^2 &= [4x^n]^2 + 2[4x^n]\{2y^m\} + \{2y^m\}^2\\ &= 16x^{2n} + 16x^ny^m + 4y^{2m}.\end{aligned}$$

Calculemos este mismo ejemplo por medio de la multiplicación de polinomios y comparemos el número de operaciones y la dificultad con que se realizan en esta forma y mediante el uso del producto notable.

$$\begin{array}{rl} & 4x^n + 2y^m\\ & 4x^n + 2y^m\\ \hline & 16x^{n+n} + 8x^ny^m\\ & \quad + 8x^ny^m + 4y^{m+m}\\ \hline & \boxed{16x^{2n} + 16x^ny^m + 4y^{2m}} \end{array} \longleftarrow \text{Resultado final}$$

¿Cuál consideras como mejor método para el cálculo del cuadrado de un binomio, el de multiplicación de polinomios o el de usar productos notables de acuerdo con su regla particular?

Su volumen podrá calcularse mediante la fórmula para obtener el volumen de un cubo $V = l^3$, como en nuestro caso $l = x + y$ la fórmula resulta:

$$V = (x + y)^3.$$

– Identificación del producto notable.

Con base en los conocimientos de operaciones con polinomios y los anteriores productos notables, ¿cómo harías el cálculo de la potencia anterior con la que se obtendría el volumen del tanque? Hasta el momento tenemos los conocimientos para realizarlo de dos maneras.

1. Aplicando la definición de potencia y la multiplicación de polinomios:

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y) = (x^2 + xy + yx + y^2)(x + y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

2. Aplicando leyes de los exponentes para descomponer la potencia y emplear el producto notable del cuadrado de un binomio, así como la multiplicación de polinomios:

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Observa que el resultado final es siempre el mismo, independientemente de la forma de desarrollar el binomio. Esto significa que se cumple la propiedad de campo de los números reales denominada conmutativa. «El orden de los factores no altera el producto.» Así es como resulta el producto notable de:

El cubo de un binomio: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

¿Cuál es el mejor método para calcular el cubo de un binomio: el de multiplicar polinomios o el de usar el producto notable correspondiente?

Si regresamos al modelo anterior, es importante considerar que...

No todos los binomios resultan con sólo dos literales, sino que en lugar de cada una de éstas puede encontrarse cualquier expresión algebraica.

Para mayor comprensión podría representarse dicho modelo mediante figuras geométricas así:

$$(\Delta + \square)^3 = \Delta^3 + 3\Delta^2\square + 3\Delta\square^2 + \square^3$$

O bien mediante signos de agrupación en la forma:

$$([\,] + \{\,\})^3 = [\,]^3 + 3[\,]^2\{\,\} + 3[\,]\{\,\}^2 + \{\,\}^3.$$

El producto notable se identifica de la siguiente forma:

EL BINOMIO DE NEWTON

Para el desarrollo del binomio de Newton se pueden aplicar dos procedimientos, uno corresponde al llamado triángulo de Pascal y el otro a la propiamente denominada fórmula del binomio de Newton.

Primero haremos el cálculo de un binomio elevado a cualquier potencia mediante el triángulo de Pascal.

Como recordarás, hemos encontrado el producto notable de un binomio al cuadrado y el de binomio al cubo mediante el modelo:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

A fin de obtener el producto notable de un binomio a la cuarta potencia y llegar así al modelo $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$, uno de los caminos que podemos elegir es aplicar el producto notable de un binomio al cuadrado y la multiplicación de polinomios.

$$(x + y)^4 = (x + y)^2(x + y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + 2xy + y^2) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Dada la laboriosidad involucrada en el desarrollo para binomios con exponente mayor a 3, presentamos aquí los siguientes productos notables que podrán calcularse por simple inspección después que veamos procedimientos más sencillos que el de multiplicar polinomios.

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$$(x + y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

$$(x + y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8.$$

Por otra parte, retomando las propiedades de las potencias, recordemos que:

$$(x + y)^1 = 1x + 1y$$

$$(x + y)^0 = 1$$

Si observamos la regularidad y simetría de los coeficientes del desarrollo de los binomios anteriores y los ordenamos en filas, podemos dibujar un triángulo llamado de Pascal. Éste fue descubierto por el físico-matemático francés Blaise Pascal (1623–1662).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Observando con atención, en este triángulo se puede descubrir que cada coeficiente se puede obtener sumando los dos que se encuentran arriba de este último.

Dibujemos la sección del triángulo de Pascal que corresponde a los productos notables que tienen exponente desde cero hasta tres.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Ahora calculemos las dos siguientes filas que corresponden a los coeficientes de los binomios a la cuarta y quinta potencias.

1
1 1
1 2 1
1 + 3 + 3 + 1
1 + 4 + 6 + 4 + 1
1 5 10 10 5 1

Trata de construir sin ayuda del triángulo de Pascal y, de esta manera, calcula las siguientes cinco filas de éste a partir del triángulo anterior. Señala los coeficientes que corresponden a la sexta potencia del binomio.

De esta forma observa que construyendo el triángulo de Pascal podemos calcular los coeficientes del desarrollo de cualquier potencia entera de un binomio, siempre que se conozcan los coeficientes que corresponden al desarrollo de la potencia inmediata anterior de un binomio.

Con respecto de la parte literal, volviendo a las potencias de los binomios presentados anteriormente, tenemos lo siguiente:

Para los exponentes de los términos del desarrollo se observa que en el primer elemento del binomio su exponente va disminuyendo una unidad en cada término que se agrega al desarrollo, mientras que en el segundo elemento del binomio se reduce su exponente también en una unidad en la misma forma.

A este producto notable se le llama *binomio de Newton*, y fue desarrollado por el físico inglés Isaac Newton (1642–1727).

De acuerdo con este binomio se aprecia que la obtención de cualquier término del desarrollo se encuentra con el siguiente procedimiento:

1. El coeficiente del primer y último términos del desarrollo del binomio es uno.

2. El coeficiente de cualquier otro término se calcula multiplicando el exponente que tiene el primer elemento del binomio en el término anterior por su respectivo coeficiente y dividiendo el producto entre el número de términos anteriores.

3. El exponente del primer elemento del binomio coincide con el del mismo binomio en el primer término del desarrollo, y a partir del segundo término se va reduciendo en una unidad en cada término que se agrega al desarrollo.

4. El exponente del segundo elemento del binomio comienza con valor cero y se va incrementando en una unidad a partir del segundo término del desarrollo.

– *Desarrollo del binomio de Newton empleando la fórmula general.*

A partir del binomio de Newton, desarrollemos los siguientes binomios.

El primero de ellos lo obtendremos en varias fases para ilustrar la aplicación del procedimiento anterior.

1. $(5m + 8n)^3 =$

FASE 1: $(5m + 8n)^3 = 1(5m)^3 +$ — Primer término

FASE 2: $(5m + 8n)^3 = 1(5m)^3 + \frac{3(1)}{1}(5m)^2(8n)^1 +$ — Segundo término

FASE 3: $(5m + 8n)^3 = 1(5m)^3 + \frac{3(1)}{1}(5m)^2(8n)^1 + \frac{2(3)(1)}{2 \cdot 1}(5m)(8n)^2$ — Tercer término

FASE 4: $(5m + 8n)^3 = 1(5m)^3 + \frac{3(1)}{1}(5m)^2(8n)^1 + \frac{2(3)(1)}{2 \cdot 1}(5m)(8n)^2 + 1(8n)^3$ — Último término

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{1(2)(3)(1)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6}{6} = 1$$

FASE 5: $(5m + 8n)^3 = 1(5m)^3 + 3(5m)^2(8n)^1 + 3(5m)(8n)^2 + 1(8n)^3$

$$= 125m^3 + 600m^2n + 960mn^2 + 512n^3$$

Conclusión del desarrollo

Cabría aquí hacer una pregunta:

FACTORIZACIÓN

En el subtema anterior se obtuvieron los productos de factores, es decir.

1. Dados los factores $(x + 3)(x - 5)$, se obtuvo el producto $x^2 - 2x - 15$.

2. Dados los factores $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, se obtuvo el producto $x^2 - x + \frac{1}{4}$.

3. Dados los factores $\left(\frac{2}{3}y + 6\right)\left(\frac{2}{3}y - 6\right)$, se obtuvo el producto $\frac{4}{9}y^2 - 36$.

4. Dados los factores $(x + 2y)^3$, se obtuvo el producto $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$.

Ahora en este subtema trataremos el problema inverso, esto es, encontrar los factores dado el producto. Con base en los ejemplos anteriores tenemos:

1. Dado el trinomio $x^2 - 2x - 5$, sus factores son $(x + 3)(x - 5)$, y corresponden a un producto de dos binomios con término común.

2. Dado el trinomio $x^2 - x + \frac{1}{4}$, sus factores son $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, como se puede ver es un producto notable del cuadrado de un binomio.

3. Dado el binomio $\frac{4}{9}y^2 - 36$, sus factores son $\left(\frac{2}{3}y + 6\right)\left(\frac{2}{3}y - 6\right)$, y nos representan un producto de binomios conjugados.

4. Dado el trinomio $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$, sus factores son $(x + 2y)(x + 2y)(x + 2y) = (x + 2y)^3$, los cuales nos representan el producto notable del cubo de un binomio.

A este último proceso se le da el nombre de factorización. Por lo que se dice que factorizar una expresión algebraica es escribirla mediante el producto indicado de sus factores.

Empezaremos por revisar algunas técnicas generales de factorización para ciertas formas de polinomios que aparecen muy frecuentemente.

FACTORIZACIÓN POR FACTOR COMÚN

Si todos los términos de un polinomio tienen un factor común, la aplicación correcta de la ley distributiva nos permitirá expresar el polinomio como el producto de dos factores donde uno de ellos será el factor común.

Visualizaremos lo anterior con los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Factorizar el polinomio $2x - x^2$.

Cada término del polinomio tiene como factor x. Por tanto x es el factor común.

1. Se busca el factor común de los términos del polinomio (primero el coeficiente y después las literales). Si los coeficientes resultan tener varios factores se saca como factor común el mayor y de las literales se toman las que tengan menor exponente.

2. El factor común obtenido se escribe como el coeficiente de un paréntesis.

3. Se divide cada término del polinomio entre el término común y los cocientes se escriben dentro del paréntesis.

Aplicando el procedimiento anterior contesta las siguientes preguntas:

¿El factor común del polinomio $10x^2 - 5a + 15a^3$ es $5a$?

¿La factorización del polinomio $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3$ resulta: $12m^2n(1 + 2mn - 3m^2n)$?

Argumenta tus respuestas.

En este tipo de factorización se presenta el caso de que el factor común del polinomio dado sea otro polinomio, por ejemplo si observamos detenidamente el polinomio $a(x + 1) + b(x + 1)$ tienen como factor común al polinomio $(x + 1)$. En estos casos, ya identificado el factor común se procede de la misma forma que en los casos anteriores.

Ejemplo. Factorizar la expresión $x(a + 1) - 3(a + 1)$.

El polinomio $(a + 1)$ es el factor común de la expresión y lo escribimos como coeficiente de un paréntesis $(a + 1)(\quad)$.

Dentro del paréntesis escribimos los cocientes que resultan de dividir cada término de la expresión entre el término común.

Así: $\dfrac{x(a + 1)}{(a + 1)} = x \quad , \quad \dfrac{-3(a + 1)}{(a + 1)} = -3$

Y tenemos que $x(a + 1) - 3(a + 1) = (a + 1)(x - 3)$.

Ejemplo. Factorizar la expresión $2x(3x - 2) - 7(3x - 2)$

El polinomio $(3x - 2)$ es factor común de la expresión y lo escribimos como coeficiente de un paréntesis.

Así: $(3x - 2)(\quad)$

Dentro del paréntesis escribimos los cocientes que resultan de dividir cada término de la expresión entre el término común, esto es:

$$\frac{2x(3x - 2)}{(3x - 2)} = 2x \quad , \quad \frac{-7(3x - 2)}{(3x - 2)} = -7$$

Por tanto tenemos que $2x(3x - 2) - 7(3x - 2) = (3x - 2)(2x - 7)$.

En el ejemplo anterior el primer y el tercer término tienen factor común x y el segundo y cuarto término tienen factor común y.

Factoriza el polinomio, pero ahora agrupando el primer término con el tercero y el segundo con el cuarto. ¿Crees que procediendo de la forma anterior se obtenga el mismo resultado?

Ejemplo. Factoriza el polinomio siguiente por agrupación de términos:

$$2y^2 - 6y + 5y + 15$$

Observa que los dos primeros términos del polinomio tienen el mismo factor común «$2y$» y los dos últimos términos del polinomio tienen el factor común «5».

Por tanto:

$2y^2 - 6y + 5y - 15$	$= (2y^2 - 6y) + (5y - 15)$	agrupando términos
	$= 2y(y - 3) + 5(y - 3)$	factorizando cada grupo por factor común
	$= (y - 3)(2y + 5)$	factorizando toda la expresión anterior por factor común.

Ejemplo. Factorizar el polinomio $8ac - 4ad - 6bc + 3bd$, por agrupación de términos.

Observa que los dos primeros términos del polinomio tienen factor común «$4a$».

Los dos últimos términos del polinomio tienen factor común «$3b$».

Por tanto:

$8ac - 4ad - 6bc + 3bd$	$= (8ac - 4ad) - (6bc - 3bd)$	agrupando términos
	$= 4a(2c - d) - 3b(2c - d)$	factorizando cada grupo por factor común
	$= (2c - d)(4a - 3b)$	factorizando toda la expresión anterior por factor común.

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Ya sabes que un trinomio es un polinomio que consta de tres términos algebraicos.

Conoces también que factorizar una expresión algebraica significa escribirla en forma equivalente mediante la multiplicación de otras expresiones más sencillas.

Pero, ¿qué es un cuadrado perfecto?

Podemos construir este concepto en la siguiente forma. Si queremos calcular la raíz de un número entero tenemos dos posibilidades:

1. Raíz exacta: $\sqrt{25} = 5$, porque $5^2 = 25$

2. Raíz inexacta: $\begin{array}{r|l} \sqrt{8} & \underline{2.8} \\ 400 & 48 \\ 16 & \end{array}$, porque $(2.8)^2 = 7.84 < 8$

De estos dos números, el 25 se llama cuadrado perfecto por tener raíz exacta.

De la misma manera un término o cualquier expresión algebraica formará un cuadrado perfecto cuando tenga raíz exacta.

Ejemplos:

$$\sqrt{4x^2} = \sqrt{2x^2} = 2x$$

$$\sqrt{(x-6)^6} = \sqrt{[(x-6)^3]^2} = (x-6)^3$$

De lo anterior podemos concluir que para que un trinomio sea cuadrado perfecto se requerirá que tenga raíz exacta y, por tanto, debe poder representarse como el cuadrado de otra expresión algebraica.

Por otra parte, recordemos que al desarrollar el cuadrado de un binomio obtenemos un trinomio.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Si aplicamos la propiedad de identidad y tratamos de calcular la raíz del trinomio obtendremos lo siguiente:

$$\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{(x+y)^2} = x + y.$$

Lo anterior significa que para extraer la raíz de un trinomio necesitamos expresarlo como el cuadrado en binomio, es decir, escribirlo en forma equivalente mediante la multiplicación de un binomio por sí mismo.

Ejemplo. Factoricemos el trinomio siguiente:

$$49x^4 - 70x^2y^3 + 25y^6 = [7x^2]^2 - 2[7x^2]^2\{5y^3\} + \{5y^3\}^2 = ([7x^2\{5y^3\})^2 = (7x^2 - 5y^3)^2$$

$\sqrt{49x^4} = 7x^2, \sqrt{25y^6} = 5y^3$; $2(7x^2)(5y^3) = 70x^2y^3$

Ejemplo. Tratemos de factorizar el siguiente trinomio:

$36x^2 + 30x + 25 =$

$36x^2 = 6x, \sqrt{25} = 5$; $2(6x)(5) = 60x$

El doble producto no coincide con el término no cuadrático del trinomio y, por tanto, éste no es cuadrado perfecto, por lo que no puede factorizarse con el procedimiento anterior.

Ejemplo. Factoriza el trinomio.

$1 + 49a^2 - 14a$

¿Qué propiedad aplicarías para factorizar este trinomio?

Como los términos no están en el orden que tiene la fórmula para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, se aplica la propiedad conmutativa para reordenarlos.

$$49a^2 - 14a + 1 = [7a]^2 - 2[7a]\{1\} + \{1\}^2 = ([7a] - \{1\})^2 = (7a - 1)^2$$

$\sqrt{49a^2} = 7a, \sqrt{1} = 1$; $2(7a)(1) = 14a$

Con el fin de comprobar que el mismo modelo se puede aplicar a trinomios con coeficientes racionales, corrobora que el siguiente trinomio sea cuadrado perfecto y factorízalo.

$$\frac{81}{4}a^6x^4 + 12a^3x^2y + \frac{16}{9}y^2 =$$

Reflexiona sobre la dificultad que te presentó la actividad anterior.

A partir del producto notable del cuadrado de un binomio hemos obtenido el modelo matemático para factorizar un trinomio cuadrado perfecto; aplica dicho modelo y utiliza su representación mediante signos de agrupación para factorizar los siguientes trinomios:

Nuevamente se aprecia que la factorización es una operación inversa a la del desarrollo de un producto notable.

Una vez más el modelo anterior se puede representar mediante signos de agrupación.

$$[\,]^2 - \{\,\}^2 = ([\,] + \{\,\})([\,] - \{\})$$

Este procedimiento de factorización debe identificarse en la forma siguiente:

> "Una diferencia de los cuadrados de dos términos algebraicos se factoriza como el producto de dos binomios conjugados, cuyos términos son iguales a los que están elevados al cuadrado."

Para comprender este tipo de factorización utilicemos su representación mediante signos de agrupación para factorizar diferencias de cuadrados.

Ejemplo. Diferencias de cuadrados con coeficientes enteros.

$$9a^4 - 25b^6 =$$

Procedimiento:

1. Se extrae raíz cuadrada de ambos términos para representar la diferencia de cuadrados según el modelo:

$$9a^4 - 25b^6 = [3a^2]^2 - \{5b^3\}^2 =$$

2. Con estas raíces se escribe el producto de binomios conjugados.

$$9a^4 - 25b^6 = [3a^2]^2 - \{5b^3\}^2 = ([3a^2] + \{5b^3\})([3a^2] - \{5b^3\}) = (3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3).$$

Ejemplo. Diferencia de cuadrados con coeficientes racionales.

$$\frac{m^2n^4}{49} - \frac{36}{16}q^6p^2 = \left(\left[\frac{mn^2}{7}\right] + \left\{\frac{6}{4}q^3p\right\}\right)\left(\left[\frac{mn^2}{7}\right] - \left\{\frac{6}{4}q^3p\right\}\right) = \left(\frac{mn^2}{7} + \frac{3}{2}q^3p\right)\left(\frac{mn^2}{7} - \frac{3}{2}q^3p\right)$$

Con base en el producto notable de dos binomios conjugados obtuvimos el modelo matemático para factorizar una diferencia de cuadrados.

Factoriza las siguientes expresiones algebraicas empleando la representación mediante signos de agrupación para cada diferencia de cuadrados:

Aplicando el procedimiento para multiplicar un binomio por un trinomio, obtenemos los resultados para los siguientes ejemplos:

1) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, ya que:

$$\begin{array}{l} a^2 - ab + b^2 \\ \quad\;\; a + b \\ \hline a^3 - a^2 b + ab^2 \\ \quad\; + a^2 b - ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 \qquad\qquad\qquad + b^3 \end{array}$$

2) $(x^2 - 2x + 4)(x + 2) = x^3 + 8$, ya que:

$$\begin{array}{l} x^2 - 2x + 4 \\ \quad\;\; x + 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 + 4x \\ \quad + 2x^2 - 4x + 8 \\ \hline x^3 \qquad\qquad\quad + 8 \end{array}$$

3) $(y + 3)(y^2 - 3y + 9) = y^3 + 27$, ya que:

$$\begin{array}{l} y^2 - 3y + 9 \\ \quad\;\; y + 3 \\ \hline y^3 - 3y^2 + 9y \\ \quad + 3y^2 - 9y + 27 \\ \hline y^3 \qquad\qquad\quad + 27 \end{array}$$

Analizando cada uno de los resultados observamos que se obtiene una suma de cubos.

Por otra parte, si a los ejemplos anteriores les aplicamos la propiedad de identidad, obtendremos una expresión algebraica, la cual se representa mediante un producto de otras expresiones, es decir, tendremos una expresión factorizada.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$y^3 + 27 = (y + 3)(y^2 - 3y + 9)$$

De esto deducimos que el modelo matemático para factorizar una suma de cubos tiene la siguiente forma:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Para su correcta aplicación, conviene identificar este modelo de la siguiente forma:

Ejemplo: $\frac{1}{8a^3} + \frac{64}{27}a^3y^6 =$

En este caso el procedimiento se desarrollará sin indicar los pasos, en la siguiente forma:

$$\frac{1}{8a^3} + \frac{64}{27}a^3y^6 = \left(\frac{1}{2a} + \frac{4}{3}ay^2\right)\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{2}{3}y^2 + \frac{16}{9}a^2y^4\right)$$

Del ejemplo anterior, calcula las raíces de ambos cubos, los cuadrados de las raíces y el producto de ambas raíces para que verifiques si la factorización es correcta.

La suma de los siguientes no es factorizable por este procedimiento $x3 + 4$; explica por qué.

FACTORIZACIÓN DE UNA DIFERENCIA DE CUBOS

Para la factorización de la diferencia de cubos, el modelo matemático sólo difiere del modelo anterior en los signos de dos de sus términos como se observa a continuación: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Dado que el binomio $x^3 - y^3$ lo puedes escribir en la forma: $x^3 + (-y)^3$, aplica la regla para el modelo de la suma de cubos y verifica que se obtiene la fórmula anterior, y, además, describe su forma de identificación.

Como ejemplos para factorizar una diferencia de cubos calcularemos un ejercicio que contenga los mismos términos que el primer ejemplo de suma de cubos, y ello de manera que observes las diferencias en los resultados.

Ejemplo: $w^3 - 125 =$

– la raíz cúbica de ambos términos $\sqrt[3]{w^3} = w$, $\sqrt[3]{125} = 5$

– el cuadrado de ambas raíces w^2, $(5)^2 = 25$

– el producto de ambas raíces $5w$

Por tanto: $w^3 - 125 = (w - 5)(w^2 + 5w + 25)$

Observa los siguientes casos para mayor comprensión de esta regla.

Ejemplo:

$8x^3 + 27y^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

Ejemplo:

$1 - 27x^3y^6 = (1 - 3xy^2)(1 + 3xy^2 + 9x^2y^4)$

Como puedes observar, estos trinomios constan de un término cuadrático, otro de primer grado y otro constante, llamado término independiente, por lo que son trinomios de una sola variable con coeficientes constantes.

El procedimiento de factorización para este caso lo describimos mediante ejemplos.

Ejemplo. Factorizar el trinomio $x^2 + 3x - 10$.

La expresión factorizada de este tipo de trinomios es un producto de dos binomios con un término común, el cual se obtiene al extraer la raíz cuadrada del término cuadrático $\sqrt{x^2} = x$, por lo que:

$$x^2 + 3x - 10 = (x\ )(x\ )$$

Los segundos términos de ambos binomios son dos números cuyo producto resulta igual al término independiente y cuya suma es igual al coeficiente del término de primer grado, esto es:

$$(+5)(-2) = -10$$

$$(+5) + (-2) = +3$$

Por tanto, la factorización completa de trinomio en este caso resulta:

$$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$$

Cabe aclarar que los dos números pueden pertenecer a cualquiera de los dos binomios. Es decir, también se puede escribir:

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$$

Ejemplo. Factorizar el siguiente trinomio.

$$x^2 - 13x - 30 =$$

– Buscamos el término común. Y calculamos los términos no comunes:

$$(-15)(-2) = -30$$

$$(-15) + (+2) = -13$$

– Escribimos la factorización del trinomio.

$x^2 - 13x - 30 = (x - 15)(x + 2)$ ó

$x^2 - 13x - 30 = (x + 2)(x - 15)$

En la factorización del trinomio $x^2 - 4x - 21$...

¿El término común es x?

$= 2x(x + 2) - 1(x + 2)$

$= (x + 2)(2x - 1)$

Ejemplo. Factorizar el trinomio $6x^2 - 5x - 4$.

Multiplicamos el coeficiente del término del segundo grado por el término constante.

Así: $(6)(-4) = -24$

El producto obtenido lo descomponemos en factores, de tal manera que la suma de los factores sea igual al coeficiente del término de primer grado.

Así: $(-8)(+3) = -24$

$(-8) + (+3) = -5$

Sustituimos en el trinomio dado el coeficiente del término de primer grado por la suma de los factores y le aplicamos la propiedad distributiva.

Así: $6x^2 - 5x - 4 \quad = 6x^2 + [(-8) + (+3)]x - 4$

$= 6x^2 - 8x + 3x - 4$

Al polinomio obtenido lo factorizamos aplicando el método de agrupación de términos, con lo cual se concluye la factorización del polinomio.

Así: $6x^2 - 5x - 4 \quad = 6x^2 + [(-8) + (+3)]x - 4$

$= 6x^2 - 8x + 3x - 4$

$= 2x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(2x + 1)$

Para mejor entendimiento de cómo se factoriza un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, daremos dos ejemplos más en los cuales no se mencionarán los pasos como en los ejemplos anteriores, pero es necesario observar que en cada ejercicio se efectúan dichos pasos.

Ejemplo. Factoriza el trinomio $6x^2 + 7x + 2$.

$(+6)(+2) = +12$

$(+4)(+3) = +12$

$(+4)(+3) = +7$

1. Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, 1, 4, 5, 7, 9 y 10.

2. Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, 2, 3, 6, 8, 11 y 12.

En seguida se presentan los resultados de dichos ejercicios:

1. $(x+3)(x-5)$	7. $(x+7)(x+3)$
2. $(4x-3)(3x+2)$	8. $(x-2)(3x+4)$
3. $(x+2)(2x+3)$	9. $(x-10)(x+3)$
4. $(x+7)(x-2)$	10. $(x+6)(x-5)$
5. $(x-8)(x-1)$	11. $(2x-3)(3x+2)$
6. $(x+1)(3x+2)$	12. $(x-1)(5x+4)$

Como ya se ha dicho, los principios que se aplican en Aritmética tienen igual aplicación en Álgebra y para el caso de las fracciones algebraicas tienen validez también, citando entre otras a:

1) Cuando el *numerador* de una fracción es multiplicado o dividido por una cantidad, la fracción queda para el primer caso multiplicada por dicha cantidad o bien queda dividida entre esa cantidad para el segundo caso.

Primer caso: *a*) multiplica

$$\left(\frac{6a}{4}\right)(2) = \frac{12a}{4}$$

Segundo caso: *b*) divide

$$\left[\frac{\frac{6a}{2}}{4}\right] = \frac{3a}{4}$$

2) Cuando el *denominador* de una fracción es multiplicado o dividido por una cantidad, la fracción queda dividida entre dicha cantidad para el primer caso y para el segundo caso queda multiplicada por dicha cantidad.

Primer caso: *a*) multiplica

$$\frac{2x}{(10)(3)} = \frac{2x}{30}$$

Segundo caso: *b*) divide

$$\frac{2x}{\frac{10}{2}} = \frac{2x}{5}$$

3) Cuando tanto el *numerador* como el *denominador* de una fracción se multiplican o dividen por una misma cantidad la fracción no se altera.

Primer caso: *a*) multiplica

$$\frac{3x}{2y} = \frac{(3x)(\overset{1}{3})}{(2y)(\underset{1}{3})} = \frac{9x}{6x} =$$

o $\frac{3x}{2y} = \frac{(3x)\cancel{(3)}}{(2y)\cancel{(3)}} = \frac{3x}{2y}$

Segundo caso: *b*) divide

$$\frac{10x}{20y} = \frac{(10x) \div (2)}{(20y) \div (2)} = \frac{5x}{10y}$$

Se entiende como reducción de una fracción algebraica el cambio que se le realiza sin afectar su valor.

Una fracción algebraica se simplifica cuando los términos se cambian por valores primos, señalando entonces que la fracción es irreducible y ha quedado expresada en su forma más simple.

Existen cambios en los signos que pueden hacerse en una fracción sin que ésta se altere, de acuerdo con los casos:

a) Sea la fracción $\frac{a}{b}$, ésta puede quedar expresada por $\frac{-a}{-b}$

o bien $-\frac{-a}{+b}$ o también por $-\frac{+a}{-b}$

b) Cuando los términos de la fracción son polinomios se pueden cambiar los signos de la forma siguiente:

Sea la fracción $\frac{m-n}{x-y}$, para cambiar el signo del numerador hay que cambiar el signo de cada término del polinomio, quedando $-m+n$ y haciendo lo mismo con el denominador, o sea, cambiando el signo por $-x+y$, concluyendo:

$$\frac{m-n}{x-y} = \frac{-m+n}{-x+y} = \frac{n-m}{y-x}$$

c) Cuando en el numerador o denominador de una fracción hay productos indicados, se pueden hacer los cambios de signos:

Se puede cambiar el signo a un número par de factores sin cambiar el signo de la fracción.

$$\frac{ab}{xy} = \frac{(-a)b}{(-x)y} \qquad \frac{ab}{xy} = \frac{(-a)b}{x(-y)}$$

$$\frac{ab}{xy} = \frac{(-a)(-b)}{xy} \qquad \frac{ab}{xy} = \frac{ab}{(-x)(-y)}$$

$\frac{ab}{xy} = \frac{(-a)(-b)}{(-x)(-y)}$. En este caso se ha cambiado el signo a cuatro factores, y siendo el cambio valor múltiplo par, el signo de la fracción no cambia.

¿Recuerdas esta ley de los signos?

Se puede cambiar el signo a un número impar de factores y, por consiguiente, se cambia el signo de la fracción.

$$+\frac{ab}{xy} = -\frac{(-a)b}{xy} \qquad +\frac{ab}{xy} = -\frac{ab}{x(-y)}$$

$$+\frac{ab}{xy} = -\frac{(-a)(-b)}{(-x)y} \qquad +\frac{ab}{xy} = -\frac{(-a)b}{(-x)(-y)}$$

Si aplicamos los principios anteriores en la fracción.

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(y-3)(y-4)}$$

Los cambios de signo pueden expresarse:

1) $\frac{(x-1)(x-2)}{(y-3)(y-4)} = \frac{(1-x)(x-2)}{(3-y)(y-4)}$ Se cambian los signos de «x» en el primer binomio del numerador y de «y» en el primer binomio del denominador *sin* cambiar el signo de la fracción.

2) $\frac{(x-1)(x-2)}{(y-3)(y-4)} = \frac{(1-x)(2-x)}{(y-3)(y-4)}$ Se cambian los signos en los cuatro términos de los dos binomios del numerador *sin* cambiar el signo de la fracción.

Ejemplo. Simplificar: $\dfrac{8a^3 + 27}{4a^2 + 12a + 9}$

Nota: Para este caso hay que recordar los casos de *factorización*.

De manera de simplificar tanto el numerador como el denominador hay que definir por medio de cuál caso de la factorización se pueden descomponer en el producto de factores los polinomios que forman la fracción algebraica.

Para el numerador de la fracción, se observa que se trata de la suma de cubos. Por lo que aplicando su regla particular de factorización tenemos:

$$8a^3 + 27 = (2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$$

En el denominador se tiene un trinomio cuadrado perfecto, el cual queda aplicándole su regla particular de factorización:

$$(4a^2 + 12a + 9) = (2a + 3)^2$$

Sustituyendo los factores del numerador y del denominador y simplificando factores comunes, tenemos:

$$\frac{8a^3 + 27}{4a^2 + 12a + 9} = \frac{(2a + 3)(4a^2 + 6a + 9)}{(2a + 3)^2} = \frac{\cancel{(2a + 3)}(4a^2 + 6a + 9)}{\cancel{(2a + 3)}(2a + 3)}$$

$$\frac{8a^3 + 27}{4a^2 + 12a + 9} = \boxed{\frac{4a^2 - 6a + 9}{2a + 3}}$$

Ejemplo. Simplificar: $\dfrac{(a^2 - 1)(a^2 + 2a - 3)}{(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 4a + 3)} =$

Para poder simplificar esta fracción algebraica es importante identificar por medio de su clasificación a todas y cada una de las expresiones que aparecen tanto en el numerador como en el denominador para que con el uso de las reglas de factorización se realice la simplificación.

Identificación de expresiones algebraicas:

$(a^2 - 1)$	se clasifica como una diferencia de cuadrados.
$(a^2 + 2a - 3)$	se clasifica como un trinomio cualquiera.
$(a^2 - 2a + 1)$	se clasifica como un trinomio cuadrado perfecto.
$(a^2 + 4a + 3)$	se clasifica como un trinomio cualquiera.

Una vez que se han identificado y clasificado las expresiones algebraicas procedamos a su factorización.

$3x-3y-x^2+xy=(x-y)(3-x),$ quedando ya factorizado el denominador de la fracción.

Sustituyendo las transformaciones realizadas en la fracción:

$$\frac{ax^2-9a}{3x-3y-x^2+xy}=\frac{a(x+3)(x-3)}{(x-y)(3-x)}$$

Con el objeto de poder eliminar el binomio $(x-3)$ del numerador es necesario cambiar el signo de los términos de binomio $(3-x)$ del denominador, y para no alterar el signo de la fracción debemos cambiar el signo del otro binomio del denominador, ya que haciendo el cambio de signo a dos factores (número par) *no se cambia el signo de la fracción.*

Por tanto:

$$\frac{ax^2-9a}{3x-3y-x^2+xy}=\frac{a(x+3)(x-3)}{(x-y)(3-x)}=\frac{a(x+3)\cancel{(x-3)}}{(-x+y)\cancel{(x-3)}}$$

$$=\boxed{\frac{a(x+3)}{y-x}}$$

Con lo cual eliminamos el binomio $(x-3)$ tanto del numerador como del denominador, quedando así el resultado.

Realiza las siguientes actividades:

1) Simplifica:

$$\frac{a^3-25a}{2a^3+8a^2-10a}=\frac{a(a^2-25)}{2a(a^2+4a-5)}=\frac{a(a+5)(a-5)}{2a(a+5)(a-1)}$$

Determina qué falta en este ejercicio para llegar al resultado y concluye el ejercicio.

2) Simplifica:

$$\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)}=x-1$$

Indica los errores que se han cometido en este ejercicio.

3) Simplifica:

$$\frac{x^2-4x+4}{4x^2-x^4}$$

En cada paso del desarrollo, señala los posibles errores o, en su caso, omisiones que existen.

$$\frac{x^2-4x+4}{4x^2-x^4}=\frac{(x-2)^2}{x^2(4-x^2)}$$

$$\frac{2a}{3b} = \boxed{\frac{6a^2}{9ab}}$$

Obteniéndose la nueva fracción, que es equivalente a la primera.

Segundo caso. Cuando se indica el denominador equivalente.

Sea la fracción $\frac{5}{4y^3}$ y debe convertirse a otra con denominador $20a^2y^4$.

Se procede a determinar el factor que, multiplicado por el denominador original, obtenga el denominador equivalente.

$$20a^2y^4 \div 4y^3 = \boxed{5a^2y.}$$

Para no afectar a la fracción original, habrá que multiplicar también el numerador por este factor.

$$(5)(5a^2y) = 25a^2y$$

$$\frac{5}{4y^3} = \frac{25a^2y}{20a^2y^4}$$

Tercer caso. Con polinomios, señalando denominador.

Sea la fracción $\frac{y-2}{y-3}$ convertirla a otra fracción con el denominador $y^2 - y - 6$.

Hay que determinar el factor que, multiplicado por el denominador original, obtenga el nuevo denominador.

$$\begin{array}{r|l} & \quad y+2 \\ \hline y-3 & y^2 - y - 6 \\ & -y^2 - 3y \\ \hline & \quad +2y - 6 \\ & \quad -2y + 6 \\ \hline & \qquad 0 \end{array}$$

El binomio $(y+2)$ deberá multiplicarse con el numerador original para no alterar la fracción.

$$(y+2)(y-2) = y^2 - 4^*$$

Quedando la conversión:

$$\frac{y-2}{y-3} = \frac{(y-2)(y+2)}{(y-3)(y+2)} = \boxed{\frac{y^2-4}{y^2-y-6}}$$

* Producto de binomios conjugados.

a) Si es posible, se deben simplificar las fracciones dadas.

b) Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores, siendo éste el denominador común.

c) Para obtener los numeradores equivalentes se divide el mínimo común múltiplo (denominador común) y cada denominador original y el cociente se multiplican por el numerador respectivo.

Ejemplos. Reducir las fracciones al mínimo común denominador.

1) Sean $\frac{2}{a}$; $\frac{3}{2a^2}$, $\frac{5}{4x^2}$

Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores a, $2a^2$, $4x^2$; siendo $4a^2x^2$ el denominador común. Ahora dividamos entre cada denominador y su cociente lo multiplicaremos por su numerador respectivo, quedando:

$$\frac{4a^2x^2}{a} = 4ax^2 \; ; \; \frac{2}{a} = \frac{(2)(4ax^2)}{4a^2x^2} = \frac{8ax^2}{4a^2x^2}$$

$$\frac{4a^2x^2}{2a^2} = 2x^2 \; ; \; \frac{3}{2a^2} = \frac{(3)(2x^2)}{4a^2x^2} = \frac{6x^2}{4a^2x^2}$$

$$\frac{4a^2x^2}{4x^2} = a^2 \; ; \; \frac{5}{4x^2} = \frac{(5)(a^2)}{4a^2x^2} = \frac{5a^2}{4a^2x^2}$$

2) Reducir: $\frac{1}{3x^2}$, $\frac{x-1}{6x}$, $\frac{2x-3}{9x^3}$ al m.c.d. (mínimo común denominador).

Se calcula el m.c.m.(mínimo común múltiplo) de todos los denominadores $3x^2$, $6x$, $9x^3$, siendo $18x^3$ el denominador común.

$$\frac{18x^3}{3x^2} = 6x \; ; \; \frac{1}{3x^2} = \frac{(1)(6x)}{18x^3} = \frac{6x}{18x^3}$$

$$\frac{18x^3}{6x} = 3x^2 \; ; \; \frac{x-1}{6x} = \frac{3x^2(x-1)}{18x^3} = \frac{3x^3-3x^2}{18x^3}$$

$$\frac{18x^3}{9x^3} = 2 \; ; \; \frac{2x-3}{9x^3} = \frac{2(2x-3)}{18x^3} = \frac{4x-6}{18x^3}$$

3) Reducir: $\frac{x+3}{x^2-1}$, $\frac{2x}{x^2+3x+2}$; $\frac{x+4}{x^2+x-2}$ al m.c.d.

Calculando el m.c.m. de los denominadores.

¿Observaste que el signo del segundo término debe ser negativo y el tercer término de la expresión entera está mal simplificado, debiendo quedar como $+y^2$?

$$x + y + \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y)(x - y) + (x^2 - y^2)}{x - y} = \frac{(x + y)(x - y) + (x - y)(x + y)}{x - y} = 2x + 2y$$

Explica los pasos de transformación necesarios hasta llegar al resultado anotado.

Falta realizar la suma de binomios conjugados anotada en el numerador y después simplificar la expresión resultante.

$$= \frac{(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2)}{x - y} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - y} = \frac{2[(x - y)\cancel{(x - y)}]}{\cancel{(x - y)}} = 2[(x - y)] = \boxed{2x + 2y}$$

Realiza las siguientes actividades y después compara tus respuestas.

Completar:

$\dfrac{3a}{a + b} = \dfrac{\quad}{a^2 + ab + b^2}$ $\qquad\qquad$ $\underline{3a^2 + 3ab}$

$\dfrac{x - 5}{a} = \dfrac{3x^2 - 15x}{\quad}$ $\qquad\qquad$ $\overline{3ax}$

$\dfrac{x + 1}{x + 5} = \dfrac{\quad}{x^2 + 3x - 10}$ $\qquad\qquad$ $\underline{x^2 - x - 2}$

Reducir a expresión entera o mixta

$\dfrac{10a^2 + 15a - 2}{5a}$ $\qquad\qquad$ $2a + 3 - \dfrac{2}{5a}$ (Exp. mixta)

$\dfrac{2a^4 - 3a^3 + a^2}{a^2 - a + 1}$ $\qquad\qquad$ $2a^2 - a - 2 - \dfrac{a - 2}{a^2 - a + 1}$

Reducir a fracción

$a^2 - 3a + 5 + \dfrac{2a^3 - 11a + 9}{a^2 + a - 2}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{a^3 + a^2 + a + 1}{a + 2}$

5	12	18	2
5	6	9	2
5	3	9	3
5	1	3	3
5	1	1	5
1	1	1	

m.c.m. $= 2^3 \times 3^2 \times 5$

$a^{3x},\ a^2mx^2,\ b^2m^4$

m.c.m. $= a^3b^2m^4x^2$

$\therefore$ m.c.m. $= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times a^3b^2m^4x^2$

m.c.m. $= 360a^3b^2m^4x^2$

CÁLCULO DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE POLINOMIOS

Para el cálculo del m.c.m. de polinomios se descomponen las expresiones algebraicas dadas en sus factores primos. El producto de los factores primos comunes y no comunes afectados de su mayor exponente determinará el m.c.m.

Ejemplos. Calcular el m.c.m. de:

1) $14a^2,\ 7x - 21$

La expresión $14a^2$ queda integrada por sus factores $2 \times 7 \times a^2$.

La expresión $7x - 21$ queda integrada por sus factores $(7)(x-3)$.

Por lo que m.c.m. $= (2)(7)(a^2)(x-3) = (14a^2)(x-3)$.

m.c.m. $= 14a^2(x-3)$

2) $4ax^2 - 8axy + 4ay^2,\ 6b^2x - 6b^2y$; factorizando cada expresión

$$4ax^2 - 8axy + 4ay^2 = 4a(x^2 - 2xy + y^2) = (4)(a)(x-y)^2 = (2^2)(a)[(x-y)]^2$$

$$6b^2x - 6b^2y = 6b^2(x-y) = (2)(3)(b^2)(x-y)$$

m.c.m. $= (2^2)(3)(a)(b^2)[(x-y)]^2 = 12ab^2(x-y)^2$

m.c.m. $= 12ab^2(x-y)^2$.

3) $2x^3 - 8x,\ 3x^4 + 3x^3 - 18x^2,\ 2x^5 + 10x^4 + 12x^3,\ 6x^2 - 24x + 24$.

Factorizando cada polinomio, tenemos:

$--\rightarrow$ Calcula el m.c.m. de las siguientes expresiones y después compara tus respuestas:

1) $24a^2x^3, 36a^2y^4, 40x^2y^5, 60a^3y^6$	$360a^3x^3y^6$
2) $3a^3, 8ab, 10b^2, 12a^2b^3, 16a^2b^2$	$240a^3b^3$
3) $4x, x^3 + x^2, x^2y - xy$	$(4x^2y)(x^2 - 1)$
4) $3x^3, x^3 + 1, 2x^2 - 2x + 2, 6x^3 + 6x^2$	$(6x^3)(x + 1)(x^2 - x + 1)$
5) $(x^2 - 25), (x^3 - 125), (2x + 10)$	$(2)(x + 5)(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$
6) $(15x^3 + 20x^2 + 5x), (3x^3 - 3x + x^2 - 1)$ y $(27x^4 + 18x^3 + 3x^2)$	$(15)(x^2)[(3x + 1)^2](x^2 - 1)$

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

ADICIÓN DE FRACCIONES

Para realizar cualquier tipo de adición de fracciones algebraicas es conveniente seguir los siguientes pasos:

1) Se deben simplificar las fracciones iniciales del problema, cuando esto sea posible.

2) Si las fracciones son de distinto denominador, hay que calcular el mínimo común denominador.

3) Se realizan las multiplicaciones indicadas.

4) Se suman los numeradores de las fracciones resultantes quedando dividido entre el común denominador.

5) Se reducen términos semejantes en el numerador.

6) Simplificamos la fracción resultante, de ser posible.

Apliquemos estos pasos de transformación para la operación de adición de fracciones algebraicas en los siguientes ejemplos:

A) Cuando las fracciones tienen denominadores con un solo término (monomios).

Simplificar la adición: $\dfrac{x-4a}{2ax}+\dfrac{x-2}{5x^2}+\dfrac{1}{10x}$

No es posible simplificar las fracciones iniciales, por lo que debemos calcular el mínimo común múltiplo para tener el mínimo común denominador, ya que son diferentes denominadores.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

En los coeficientes de los denominadores se tienen los factores primos comunes (2)(5).

$ax \qquad x2 \qquad x$

En la parte literal de los denominadores se tienen a las literales comunes afectadas de su mayor exponente a, x^2, quedando el mínimo común denominador (m.c.d.) por $(2)(5)ax^2 = 10ax^2$.

Se divide el m.c.d. entre cada denominador y su cociente se multiplica por el numerador correspondiente.

$$\frac{x-4a}{2ax}+\frac{x-2}{5x^2}+\frac{1}{10x}=\frac{(5x)(x-4a)+(2a)(x-2)+(ax)(1)}{10ax^2}=$$

$$\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{(2)(x-1)+(3)(x+1)+(6)}{(6)(x+1)(x-1)}$$

realizando las multiplicaciones.

$$\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-2+3x+3+6}{(6)(x+1)(x-1)}$$

simplificando términos semejantes en el numerador.

$$\frac{1}{3x+3}+\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{5x+7}{(6)(x+1)(x-1)}.$$

Como no se puede simplificar la fracción, ésta queda como resultado.

Realiza la adición de fracciones algebraicas y señala si se cometieron errores al solucionar el ejercicio.

$$\frac{a-1}{3}+\frac{2a}{6}+\frac{3a+4}{12}=\frac{(4)(a-1)+(2)(2a)+(3a+4)}{12}$$

$$=\frac{4a-4+4a+3a+4}{12}$$

$$=\boxed{\frac{11a}{12}}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
3 & 6 & 12 & 2 \\
3 & 3 & 6 & 2 \\
3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Desarrollando la suma de fracciones siguiente, indica si faltan o no pasos de transformación para validar el resultado señalado.

$$\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x+y)(x+y)+(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{(x+y^2+x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}$$

Falta realizar los siguientes pasos:

$$\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}+\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}$$

$$=\boxed{\frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}}$$ ——— Resultado

Observa los siguientes ejemplos:

1) $\frac{2}{x-5}+\frac{3x}{x^2-25}=\frac{(x+5)(2)+(1)(3x)}{(x+5)(x-5)}=\frac{2x+10+3x}{(x+5)(x-5)}=$

2) Si las fracciones son de distinto denominador, hay que calcular el mínimo común denominador.

3) Se multiplican las expresiones indicadas.

4) Se restan los numeradores y la diferencia queda afectada del común denominador.

5) Se reducen términos semejantes en el numerador.

6) Simplificamos la fracción resultante, de ser posible.

Apliquemos estos pasos de transformación para la operación de resta de fracciones algebraicas en los siguientes ejemplos:

A) Cuando las fracciones tienen denominadores con un solo término (*monomios*).

$$\frac{a+2b}{3a}-\frac{4ab^2-3}{6a^2b}=$$

No es posible simplificar las fracciones iniciales por lo que debemos calcular el m.c.m. de los denominadores; m.c.m. $= 6a^2b$

$$\frac{a+2b}{3a}-\frac{4ab^2-3}{6a^2b}=\frac{(2ab)(a+2b)-[(1)(4ab^2-3)]}{6a^2b}$$

$$=\frac{2a^2b+4ab^2-[4ab^2-3]}{6a^2b}$$

Se obtienen los productos parciales:

$$\frac{6a^2b}{3a}=2ab\ ;\ (2ab)(a+2b)$$

$$=\frac{2a^2b+4ab^2-4ab^2+3}{6a^2b}$$

$$\frac{6a^2b}{6a^2b}=1\ ;\ (1)(4ab^2-3)$$

Se realizan las multiplicaciones del numerador.

Restando los numeradores

Reduciendo términos

B) Cuando las fracciones tienen denominadores con varios términos (*polinomios*).

$$\frac{2}{x+x^2}-\frac{1}{x-x^2}-\frac{1-3x}{x-x^3}=$$

Se calcula el m.c.m. para que sea el m.c.d. por su regla correspondiente de factorización.

$$\frac{x^2+3x-2}{2x^2}-\frac{2x+5}{4x}=\frac{(2)(x^2+3x-2)-x(2x+5)}{4x^2}=\frac{\cancel{2x^2}+6x-4-\cancel{2x^2}-5x}{4x^2}$$

$$=\frac{2x^2+6x-4-2x^2-5x}{4x^2}$$

Se realizan las operaciones algebraicas indicadas en el numerador.

$$=\frac{2x^2+6x-4-2x^2-5x}{4x^2}=\boxed{\frac{x-4}{4x^2}}$$

Se reducen términos semejantes del numerador

2) Realizar $\frac{x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{8x-8}$

$$\frac{x-1}{4x+4}+\frac{x+2}{8x-8}=\frac{(2)(x-1)(x-1)-[(x+1)(x+2)]}{(8)(x+1)(x-1)}$$

Se calcula el m.c.m., y para tener el m.c.d. se divide el m.c.d. con cada denominador y se indican los productos con cada numerador.

$$=\frac{(2)(x-1)^2-(x^2+3x+2)}{(8)(x+1)(x-1)}$$

Se indica en el numerador que hay un binomio al cuadrado y también se realiza el producto de binomios con término común.

$$=\frac{(2)(x^2-2x+1)-(x^2+3x+2)}{(8)(x+1)(x-1)}$$

Se realiza por productos notables el cuadrado del binomio

$$=\frac{2x^2-4x+2-x^2-3x-2}{(8)(x+1)(x-1)}$$

Se realiza la operación de multiplicación y se suprimen los signos de agrupamiento cambiando los del sustraendo.

$$=\frac{x^2-7x}{(8)(x+1)(x-1)}$$

$$=\boxed{\frac{x^2-7x}{(8)(x^2-1)}}$$

Se reducen términos semejantes en el numerador; asimismo, en el denominador se puede cambiar el producto de binomios conjugados por su diferencia de cuadrados, la cual se refleja en el resultado.

2) $\left(\frac{3x-3}{2x+4}\right)\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-x}\right) =$

Se factorizan todas y cada una de las expresiones algebraicas.

$$\left(\frac{3x-3}{2x+4}\right)\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-x}\right) = \frac{(3)(x-1)(x+2)^2}{(2)(x+2)(x)(x-1)}$$

Sustituyéndose por sus factores.

$$\left(\frac{3x-3}{2x+4}\right)\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-x}\right) = \frac{(3)\cancel{(x-1)}\cancel{(x+2)}(x+2)}{(2)\cancel{(x+2)}(x)\cancel{(x-1)}}$$

Se simplifican los factores primos comunes tanto del numerador coo del denominador.

$$\left(\frac{3x-3}{2x+4}\right)\left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-x}\right) = \frac{(3)(x+2)}{(2)(x)}$$

Se realizan los productos indicados en la fracción resultante.

Factorizando:

$3x-3 = 3(x-1)$ por factor común

$x^2+4x+4 = (x+2)^2$ binomio al cuadrado

$2x+4 = 2(x+2)$ por factor común

$x^2-x = x(x-1)$ por factor común

$\left(\frac{3x-3}{2x+4}\right)\left(\frac{x^2+4x'+4}{x^2-x}\right) = \frac{3x+6}{2x},$ obteniéndose su resultado.

3) Multiplicar las siguientes fracciones.

$$\left(\frac{a^2-1}{a^2+2a}\right)\left(\frac{a^2-a-6}{3a^2+7a+4}\right)\left(\frac{3a+4}{a^2-4a+3}\right) =$$

Factorizando todas y cada una de las expresiones que aparecen en las fracciones.

$$= \frac{\cancel{(a+1)}\cancel{(a-1)}\cancel{(a-3)}\cancel{(a+2)}\cancel{(3a+4)}}{(a)\cancel{(a+2)}\cancel{(a+1)}\cancel{(3a+4)}\cancel{(a-1)}\cancel{(a-3)}} =$$

Simplificando factores comunes tanto en el numerador como en el denomi nador.

Con la aplicación de la regla de los productos notables para la multiplicación de binomios con término común obtenemos el resultado de este ejercicio.

$$\left(a+3-\frac{5}{a-1}\right)\left(a-2+\frac{5}{a+4}\right)=a^2+a-6$$

Multiplicar $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=$

A) Se convierten las expresiones mixtas a fracciones.

$$a+\frac{a}{b}=\frac{ab+a}{b}$$

$$a-\frac{a}{b+1}=\frac{(a)(b+1)-a}{b+1}=\frac{ab+a-a}{b+1}=\frac{ab}{b+1}$$

B) Se multiplican las fracciones obtenidas.

$$\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=\left(\frac{ab+a}{b}\right)\left(\frac{ab}{b+1}\right)$$

$$\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=\frac{(ab+a)(ab)}{(b)(b+1)}$$

$$\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=\frac{a^2b^2+a^2b}{(b)(b+1)}$$

$$\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=\frac{a^2\cancel{b}\cancel{(b+1)}}{\cancel{b}\cancel{(b+1)}}$$

$$\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b+1}\right)=a^2$$

Realiza los siguientes ejercicios y compara tus respuestas.

1. $\left(\frac{2x^2+x}{6}\right)\left(\frac{8}{4x+2}\right)=$ 1. $\frac{2x}{3}$

2. $\left(\frac{2x^2+2x}{2x^2}\right)\left(\frac{x^2-3x}{x^2-2x-3}\right)=$ 2. 1

3. $\left(\frac{a^2+4ab+4b^2}{3}\right)\left(\frac{2a+4b}{[a+2b]^3}\right)=$ 3. $\frac{2}{3}$

4. $\left(\frac{x^2+2x}{x^2-16}\right)\left(\frac{x^2-2x-8}{x^3+x^2}\right)\left(\frac{x^2+4x}{x^2+4x+4}\right)=$ 4. $\frac{1}{x+1}$

$$\left(\frac{x^3+125}{x^2-64}\right) \div \left(\frac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}\right) = \left(\frac{x^3+125}{x^2-64}\right)\left(\frac{x^2+x-56}{x^3-5x^2+25x}\right)$$

Se procede a realizar la multiplicación de fracciones como se explicó en el punto anterior y es conveniente precisar que todas las expresiones que aparecen en las fracciones se pueden factorizar

$$x^3-125 = (x+5)(x^2-5x+25)$$

Diferencia de cubos – factorizada – producto de binomio y trinomio

$$x^2-64 = (x+8)(x-8)$$

Diferencia de cuadrados – factorizada – producto de binomios conjugados

$$x^2+x-56 = (x+8)(x-7)$$

Trinomio – factorizado – producto de binomios con término común

$$x^3-5x^2+25x = (x)(x^2-5x+25)$$

Polinomio – factorizado – con factor común

$$\left(\frac{x^3+125}{x^2-64}\right) \div \left(\frac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}\right) = \left(\frac{x^3+125}{x^2-64}\right)\left(\frac{x^2+x-56}{x^3-5x^2+25x}\right)$$

$$\left(\frac{x^3+125}{x^2-64}\right) \div \left(\frac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}\right) = \frac{(x+5)\cancel{(x^2-5x+25)}\cancel{(x+8)}(x-7)}{\cancel{(x+8)}(x-8)(x)\cancel{(x^2-5x+25)}}$$

$$\left(\frac{x^3+125}{x^2-64}\right) \div \left(\frac{x^3-5x^2+25x}{x^2+x-56}\right) = \frac{(x+5)(x-7)}{(x-8)(x)} = \frac{x^2-2x-35}{x^2-8x}$$

Efectúa la división de fracciones indicada.

$$\left(\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\right) \div \left(\frac{5x^2-5x}{2x+6}\right) = \left(\frac{x^3-x}{2x^2+6x}\right)\left(\frac{2x+6}{5x^2-5x}\right)$$

Termina el ejercicio y verifica el resultado $\frac{x+1}{5x}$.

Realiza los siguientes ejercicios, después compara tus resultados.

1. $\dfrac{1}{a^2-a-30} \div \dfrac{2}{a^2+a-42}$	1. $\dfrac{a+7}{2a+10}$
2. $\dfrac{8x^2+26x+15}{16x^2-9} \div \dfrac{6x^2+13x-5}{9x^2-1}$	2. $\dfrac{3x+1}{4x-3}$

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

A fin de que apliques el conocimiento adquirido, deberás factorizar las siguientes expresiones algebraicas y simplificar las fracciones algebraicas racionales, entre las cuales aparecen casos particulares para los binomios y los trinomios. También se necesita la aplicación de varios procedimientos de factorización para algunas de dichas expresiones.

Es necesario que, antes de desarrollar un producto notable, factorizar un polinomio o simplificar una expresión algebraica racional, pongas mucha atención en su estructura algebraica.

I. Desarrolla los siguientes productos notables:

1. $(7x + 11)^2$
2. $\left(x^4 + \frac{1}{2}\right)\left(x^4 - \frac{3}{2}\right)$
3. $(2x + 5y)^4$
4. $(a^2 - 2b)^3$
5. $(y^2 - 3y)(y^2 + 3y)$
6. $(ab + 5)(ab - 6)$
7. $(x - 2)^7$
8. $(2m + 3)^3$
9. $(m - n)(m + n)$
10. $(-9 + a^2)(5 + a^2)$
11. $(a^2 - 2b^3)^5$
12. $\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{3}y^{-2}\right)^2$
13. $(-2y + 2x)(2x + 2y)$
14. $(a^x + b^x)^3$
15. $(3a^3 - 8b^4)^2$

II. Factoriza o simplifica, según sea el caso, las siguientes expresiones algebraicas:

1. $x^3 - 4x^4$
2. $m^3 + 8a^3x^3$
3. $36ax^2 - 21ax^3 - 30ax^4$
4. $6x^2 - 18x$
5. $c^2 - 4c - 320$
6. $a^2 + a - ab - b$

LINEAMIENTOS DE AUTOEVALUACIÓN

Con la finalidad de que tengas una orientación en cuanto a las técnicas que se debieron emplear en la realización de la actividad anterior, revisa y compara tus respuestas; en caso de que te sea necesario, se clasifican aquí los ejercicios de dicha actividad en grupos.

I. Productos notables

–Producto de un binomio con término común: 2, 6 y 10

–Producto de binomios conjugados: 5, 9 y 13

–Cuadrado de un binomio: 1, 12 y 15

–Cubo de un binomio: 4, 8 y 14

–Binomio de Newton: 3, 7 y 11

II. Factorización

–Expresiones algebraicas que requirieron la aplicación de un solo tipo de factorización: números 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 15 y 20.

–Expresiones que se factorizan mediante el empleo de varias técnicas de factorización: números 3, 13 y 19.

–Casos especiales de binomios y trinomios: números 17 y 18.

–Fracciones algebraicas a simplificar mediante el empleo de varias técnicas de factorización: números 8, 10, 14 y 16.

A continuación presentamos las soluciones de los ejercicios de la citada actividad de consolidación:

I. Productos notables

1. $49x^2 + 154x + 121$

2. $x^8 - x^4 - \frac{3}{4}$

3. $16x + 160x^3y + 600x^2y^2 + 1\,000xy^3 + 625y^4$

4. $a^6 - 6a^4b + 12a^2b^2 - 8b^3$

BIBLIOGRAFÍA

Baldor A.: *Álgebra elemental*. Ediciones y Distribuciones Códice, Madrid, 1974.

Barnett, S.A., y Nolasco: *Álgebra elemental estructurada y aplicaciones*, 2a. ed. McGraw-Hill, México.

Britton y Bello: *Matemáticas contemporáneas*.

Dolciani *et al.*: *Álgebra moderna*. Publicaciones Cultural, México, 1967.

Gobran, Alfonse: *Álgebra*. Iberoamericana, México, 1986.

Perelman Y.: *El divertido juego de las Matemáticas*. Círculo de Lectores, Ediciones Martínez Roca, Barcelona, 1968.

Phillips *et al.*: *Álgebra con aplicaciones*. Harla, México, 1983.

Rees, P.K. *et al.*: *Álgebra*. McGraw-Hill, México, 1980.