COLEGIO DE BACHILLERES
COORDINACIÓN DEL SISTEMA DE ENSEÑANZA ABIERTA
DIRECCIÓN DE PLANEACIÓN ACADÉMICA

MATEMÁTICAS II
FASCÍCULO I
FUNCIÓN LINEAL Y ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Alejandro Rosas Snell
Juan Zúñiga Contreras

INTRODUCCIÓN

En el curso anterior, en los temas de Aritmética e introducción al Álgebra comprobaste la importancia de manejar adecuadamente el lenguaje algebraico para, entre otras cosas, representar cantidades; al mismo tiempo haz hecho operaciones con números reales y también construiste la gráfica de algunas ecuaciones en el plano cartesiano; todos estos conceptos son antecedentes firmes que en este curso de Matemáticas II te permitirán abordar el modelo matemático de la *función*.

En el campo de la Matemática el concepto de *función* tiene gran relevancia, pues a través de las funciones se pueden representar matemáticamente los más diversos fenómenos de la naturaleza. De esta manera, los físicos, biólogos, médicos, ingenieros, sociólogos y economistas, entre otros profesionales, para analizar sus objetos de estudio requieren de modelos lógico-simbólicos que les permitan manejar e interpretar los resultados de sus observaciones, esto lo hacen por medio de funciones.

En las siguientes páginas trabajaremos con la función lineal desde dos aspectos diferentes: en primer lugar, el de su expresión algebraica, y en seguida de su representación gráfica, aspectos que, como podrás observar, son complementarios e igualmente importantes.

En relación con tu propia experiencia, es probable que en muchos eventos de tu vida cotidiana hayas utilizado el concepto de función, y en particular el de función lineal; por ejemplo, cuando dices: "mi tarea depende de tu ayuda", "compraré tantos artículos según el precio que tengan", "el número de accidentes de tránsito depende del número de automóviles que transiten", "la longitud de un cabello está en función del tiempo", etc. En todas estas situaciones se puede observar la variación entre dos cantidades, una de las cuales depende de la otra. Trataremos de aprovechar estos conocimientos que ya tienes, para estudiar la función lineal y que ésta sea una herramienta útil en la solución de algunos problemas.

CUESTIONAMIENTO GUÍA

Cotidianamente todos empleamos funciones, por ejemplo:

¿Sabías que la frecuencia con la que cantan los grillos es una función lineal que depende de la temperatura? La siguiente tabla muestra el número de chirridos que el grillo emite por minuto y la temperatura en grados Fahrenheit. ¿Puedes determinar la expresión que relaciona el número de sonidos por minuto (c) con la temperatura (x).

Temperatura (°F)	40	41	42	43	44
Sonidos/minuto	0	4	8	12	16

Observa otro caso:

El departamento de policía de una pequeña ciudad estudia la posibilidad de comprar carros-patrulla. Los analistas de la policía estiman que el costo de un carro, completamente equipado, es de N$ 38 000.00. También han calculado un costo de operación promedio de N$ 1.00 por kilómetro. ¿Cuál es la función que determina el costo total de comprar y operar el auto en términos del número de kilómetros (x) que se maneje?

Como te habrás dado cuenta, encontrar la expresión que relaciona una cantidad con otra nos permite analizar un problema o situación real. Este análisis se facilita aún más si utilizamos una gráfica en el plano cartesiano.

Con el estudio de este fascículo aprenderás cómo interpretar la fórmula de la función y su gráfica para utilizarlas en la solución de diferentes problemas, y las relacionaremos con el sistema de ecuaciones que aprendiste en tu curso de Matemáticas I. A propósito, ¿sabes cuál es la diferencia o semejanza entre una ecuación lineal y una función lineal?

RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN Y LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Existe una variedad de problemas que se pueden resolver mediante el modelo de la función lineal; los ejemplos que a continuación analizaremos son una muestra de ello.

Ejemplo 1 (costo-precio unitario)

Una lata de leche en polvo tiene un precio unitario de N$0.25; elaboremos una tabla de valores donde x represente el número de latas y y el precio total correspondiente; complétala y busca la fórmula algebraica que relacione el precio total en función del número de latas.

Núm. de latas (x)	1	2		4	5	13
Precio-unitario (y)	0.250		0.750	1.00		

Solución: Si observas, el precio de una lata es de N$.25, ¿cuántas latas se podrán comprar con N$.75? ¡Exacto!... 3. Ahora la pregunta es la siguiente: ¿Cuánto se pagará por 2 y 5 latas? Completa los valores que faltan.

Bien, ahora para cada pareja x, y efectúa el cociente y/x ¿qué observas?

cociente o razón

$$\frac{0.25}{1} = 0.25 \qquad \frac{100}{\quad} = 0.25$$

$$\frac{0.50}{2} = 0.25 \qquad \frac{\quad}{15} = 0.25.$$

¡Correcto!, la razón de cambio entre x y y es 0.25; es decir: y/x = constante:

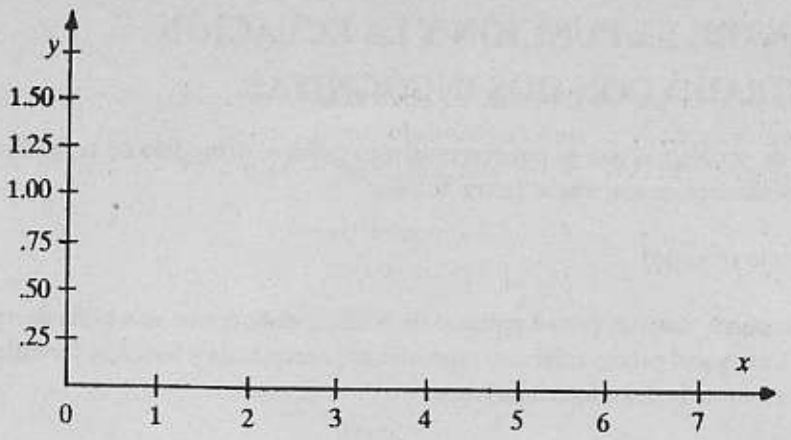
$$\boxed{\frac{y}{x} = a.}$$

¿Recuerdas cómo despejar y de la ecuación anterior?... En efecto, $y = ax$. Para este problema la ecuación sería: $y = 0.25x$, ¿por qué?

Esta fórmula o ecuación representa la regla de correspondencia entre el precio unitario de las latas y el costo de comprar cierto número de ellas.

Una vez que tenemos la fórmula, podemos calcular el costo para cualquier número de latas. ¿Cuánto costarán 47, 173 o 1 287 latas?

Recordando cómo se construye una gráfica en el plano cartesiano, grafica la tabla de valores de este problema.



Gráfica 1.

Ejemplo 2 (distancia-tiempo)

El atleta estrella del Colegio de Bachilleres corre diariamente a una velocidad promedio de 6 km/h. Si el primer día corre durante 30 minutos y va aumentando 3 minutos en los días siguientes hasta llegar a 45 minutos, ¿qué distancia recorrió cada día?

Solución: Para resolver este ejemplo construiremos una tabla de valores, pero antes debemos calcular cuál es la razón de cambio entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido para hallar la fórmula correspondiente, ¿podrás hacerlo?...

tiempo (min)	*Distancia (km)*
x	y
30	3 km
33	
36	
39	
42	
45	

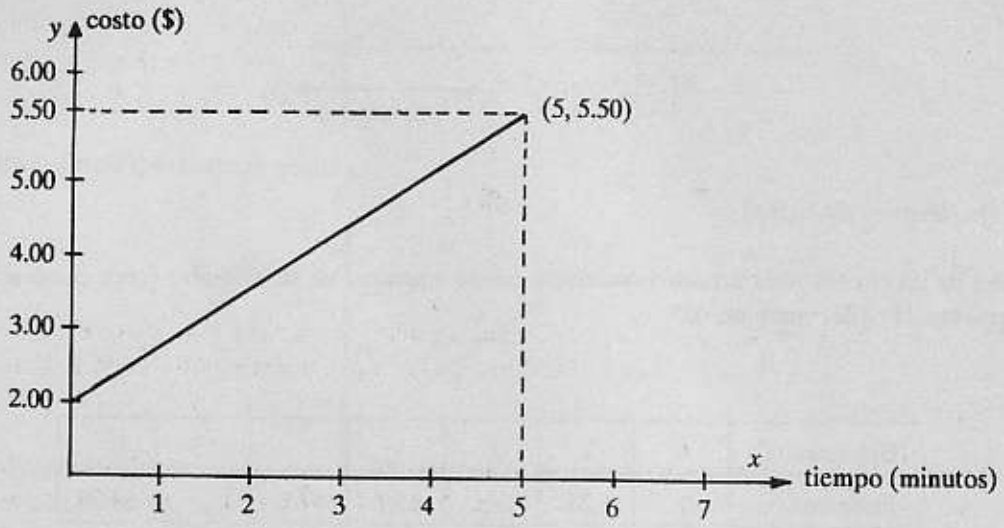
Del ejemplo anterior recuerda que la razón de cambio es constante, es decir, $y/x = a$. Observa que $a = 0.1$, ¿por qué? Asimismo cabe mencionar que conociendo la distancia que recorre en 30 minutos, ese dato nos ayuda a calcular los demás valores. Encontrar la fórmula no te será muy difícil...

Trata de predecir qué distancia recorrerá a los 25 o 55 minutos; para ello apóyate en una gráfica en el plano cartesiano.

Ejemplo 3 (costo–tiempo)

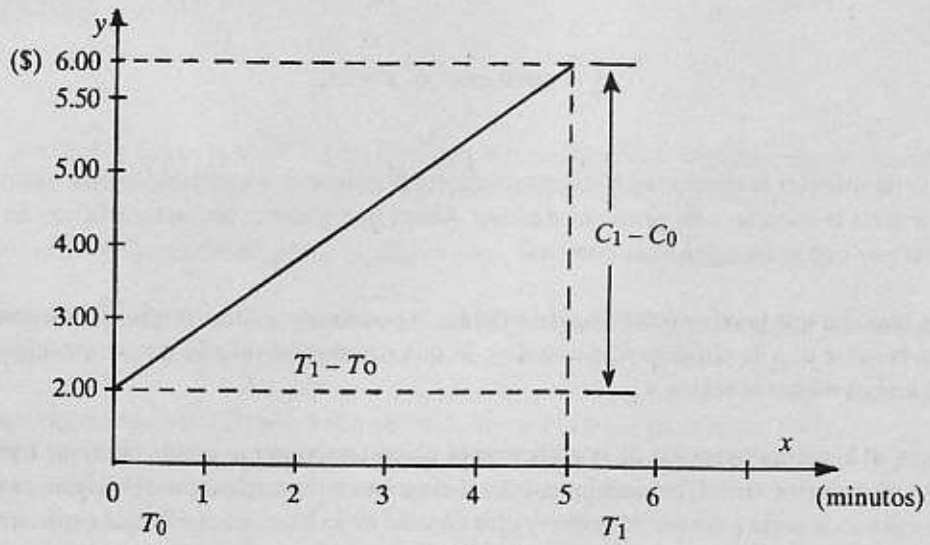
Cuando abordamos un taxi en la Ciudad de México, observamos que el taxímetro marca una cantidad inicial, digamos N$2.00, y después de cierto tiempo de recorrido cambia a N$2.50, N$3.00, N$3.50, etc. Si después de 5 minutos la cantidad que marca es N$5.50, ¿cuanto esperaríamos que marcara a los 7, 8 y 11 minutos?

Solución: La solución de este problema la iniciamos con una gráfica en el plano cartesiano, que en el eje horizontal nos muestre la variación del tiempo y en el eje vertical la del costo.



Gráfica 2.

Como podemos observar, en cero minutos ya existe un costo inicial, y a partir de éste la variación es constante hasta llegar a un momento final de 5 minutos; el costo para este tiempo es de N$5.50. Con los trazos auxiliares construimos un triángulo rectángulo, ¿cuál es la longitud del lado vertical?... ¡Exacto!... N$3.50, es decir, la diferencia entre el costo final (a los 5 minutos) y el costo inicial. Ahora, ¿cuál es la longitud del lado horizontal? Efectivamente, es 5.



Gráfica 3.

Bien, ahora... ¿cómo calculas la razón de cambio?

¡Correcto!, calculando el cociente de $(C_1 - C_0)/(T_1 - T_0)$, que es lo que hiciste en los ejemplos anteriores, como y/x; con esto, $y/x = .70$ y despejando y nos queda $y = .70x$, con lo que calculamos la variación del costo en función del tiempo. No olvides que ya existe un costo inicial de N$2.00 que debemos sumar; por lo tanto, ¿cuál es la expresión completa de la función?

Con la fórmula establecida, calcula el costo para 7, 8, 11 o más minutos.

$f:x$ ———— . $y =$ _____
(expresión)

Ejemplo 4 (perímetro - diámetro)

El perímetro de un círculo varía proporcionalmente con la magnitud de su diámetro (cm), como se muestra en la tabla siguiente. ¿Puedes completarla?

Diámetro (x)	0	2	3			15	
Perímetro(y)	0	6.28		15.7	47.1		84.78

Para tabular este ejemplo elabora una gráfica en el plano cartesiano y encuentra la expresión de la función correspondiente.

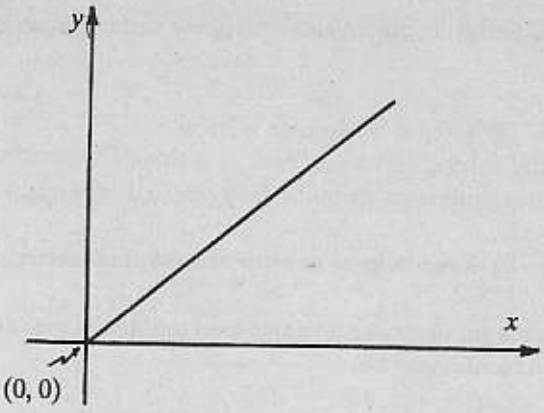
Los ejemplos anteriores nos muestran que dos magnitudes varían en forma proporcional cuando existe una razón de cambio constante entre las variables, es decir:

$$\frac{y}{x} = \text{constante} \quad \text{o} \quad y = ax.$$

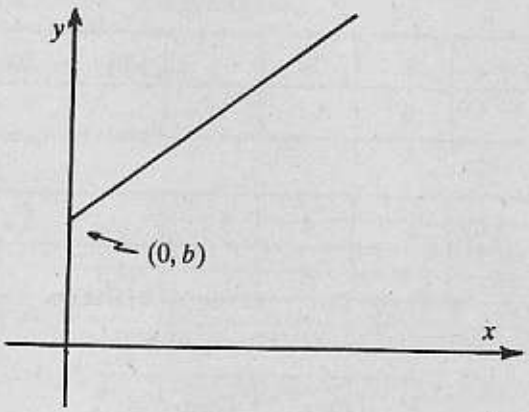
Con el objeto de manejar la terminología correspondiente llamaremos a x variable independiente, a y variable dependiente y a sería la constante de proporcionalidad. Ahora que conoces las características de estas literales, ¿puedes explicar por qué se les asignó ese nombre?

Observamos también que la relación entre dos variables la podemos registrar por medio de una tabla de valores, donde a cada valor de x le corresponde uno de y, lo que da como resultado que se establezcan parejas de números (x, y), ambos números reales.

Por otra parte, al hacer un bosquejo de la gráfica en el plano cartesiano se puede observar que si la ecuación o expresión incluye un valor inicial, la recta intersecta al eje y en un punto distinto del origen, es decir, tenemos dos casos: uno cuando la recta pasa por el origen y otro cuando no lo hace, situación que explicaremos mediante gráficas:



Gráfica 4. Recta que corta al origen.



Gráfica 5. Recta que no corta al origen.

EJERCICIOS

Serie 1

Encuentra la relación entre las variables de los siguientes problemas y exprésala algebraicamente; construye un bosquejo de la gráfica que la represente utilizando tabulaciones como apoyo.

1. El perímetro de un cuadrado, $p(m)$, es cuatro veces la longitud de su lado, $l(m)$.

2. El promedio de goleo de Hugo Sánchez es de 0.45 por partido ¿Cuántos goles podría anotar si jugara 6, 7, 9 u 11 partidos? Interpreta tus resultados.

3. El peso (kg) de cualquier líquido varía en forma proporcional a su volumen (m^3).

4. El ingreso anual ($) de una inversión varía con la tasa de interés (%).

5. La presión del agua en lb/ft^2 en el mar varía proporcionalmente con la profundidad en pies (ft).

6. La fuerza (N) necesaria para mover un objeto sobre un plano varía proporcionalmente con el peso (kg) del mismo.

7. El número de centímetros es 100 veces el número de metros.

8. El número de pesos mexicanos cambia en términos del número de dólares.

9. En un ecosistema, el número de depredadores es proporcional al número de presas.

10. El costo total en pesos ($) para producir calcomanías es el monto del alquiler del local ($) más 1.5 veces el número de calcomanías producidas por día.

Completa cada una de las siguientes tabulaciones y encuentra la constante de proporcionalidad, así como la expresión adecuada, para lo cual deberás completar las tablas.

11.

s	6	8	10		18	20	
t		4		7			15

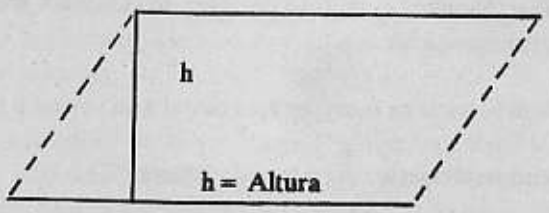
12.

x	3		4	5.2		8.5	
y	6	7	8		14.8		22.8

13.

Litros	*Costo* (N$)
2	1.75
	2 .55
4	
5	
10	8.50
	17. 85
27	

14. Para un paralelogramo se tienen los siguientes datos:



Altura (cm)	4	5	9	10		20
Área (cm^2)	28		49	70	105	

15. Se tienen cuatro secuencias proporcionales n, m, u y t, completa la tabla siguiente:

n	1 500	840	1 200	
m	75	42		250
u	3 000		2 400	10 000
t		3.36	4.8	20

16. He aquí una tabla de números proporcionales; en ella hay dos errores dentro de la segunda línea:

a) Encúentralos y corrígelos modificando la segunda línea.

b) ¿Cuál es el coeficiente de proporcionalidad?

c) ¿Cuál es la expresión de correspondencia?

x	73.2	4.15	21.3	61.7
y	302.316	17.18	87.969	254.204

17. Las secuencias $(2^2, 2^3, 2^4...)$ y $(3^2, 3^3, 3^4...)$ ¿son proporcionales? ¿Por qué?

18. Encuentra un número real x, tal que $(-5x)$ sea proporcional a $(3,-7)$.

19. Tres personas piden prestado N$250, N$400 y N$700, respectivamente. Cada una devolverá, en ese mismo orden, N$300, N$480 y N$800. ¿Las devoluciones son proporcionales a sus préstamos? ¿Por qué?

Ya que has ejercitado los conceptos anteriores, podemos hacer una pausa para hablar acerca de la notación matemática que utilizaremos para denotar la relación de proporcionalidad entre dos cantidades. Se puede decir que la secuencia de números reales $(X_1, X_2, X_3,...)$ es proporcional a la secuencia de números reales $(Y_1, Y_2, Y_3,...)$, todos ellos diferentes de cero, si existe una *funcion real f* que relacione en una tabla de valores a cada valor de x con su respectivo valor de y. Nótese que este último es el valor de la función y que se puede expresar de tres maneras diferentes:

1. *Tabla de proporcionalidad*

$$f: x \longrightarrow y$$

$$X_1 - - - Y_1$$
$$X_2 - - - Y_2$$
$$X_3 - - - Y_3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
etc.

2. *Tabla de valores con coeficiente de proporcionalidad,* donde existe un número real tal que: $y = f(x)$.

X	$f(x) = ax$
X_1	$Y_1 = ax_1$
X_2	$Y_2 = ax_2$
X_3	$Y_3 = ax_3$
	etc.

3. *Una serie de proporciones*

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} \ldots \text{etc.}$$

Analiza estas tres formas de expresar una función y trata de definir qué es una función; observa los dos primeros casos: éstos nos interesan pues *nos acercan más al concepto de función como una regla de correspondencia entre un conjunto de valores reales* (variable independiente) *con otro conjunto de valores reales también* (variable dependiente). De tus conocimientos de Álgebra básica recordarás que al primer conjunto de éstos se le conoce como *dominio* de la función y al segundo se le llama *rango* o *recorrido* de la función.

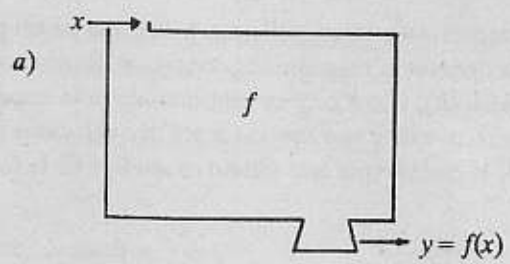
Esto nos conduce a la siguiente notación funcional:

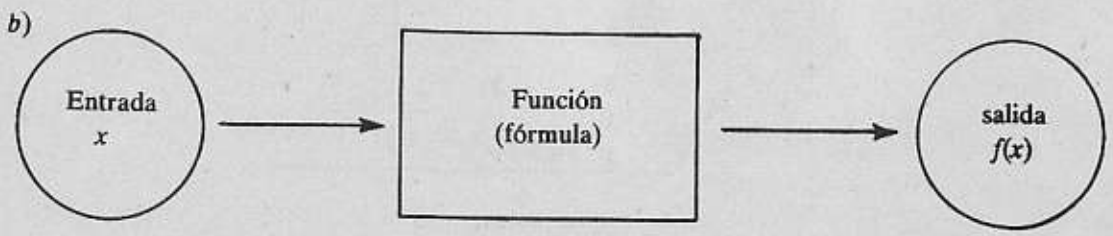
$f: A \longrightarrow R$ (esto se lee: función f de A en R), donde A es el dominio y R *es el Rango*;

o bien:

$f: x \longrightarrow y$ (esto se lee: y función f de x), donde y recibe el nombre de imagen de x bajo la regla f.

Comúnmente esta última forma se puede escribir haciendo $y = f(x)$ que se lee: y igual a f de x y se representa en el siguiente esquema:





GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Ahora pondremos especial atención en la representación geométrica de la función lineal. Ya en el curso de Matemáticas I graficaste algunas ecuaciones de primer grado cuando resolviste sistemas de ecuaciones simultáneas a tráves del método gráfico, en seguida trataremos de relacionar esa experiencia con el concepto de función.

Los ejemplos analizados en páginas anteriores muestran que existen dos aspectos importantes de la función lineal; el primero de ellos es la *expresión algebraica* que la define y el segundo, la *tabla de valores* donde se registran los valores de las variables independiente y dependiente. Esto nos conduce al análisis de un tercer aspecto: la *gráfica de la función*.

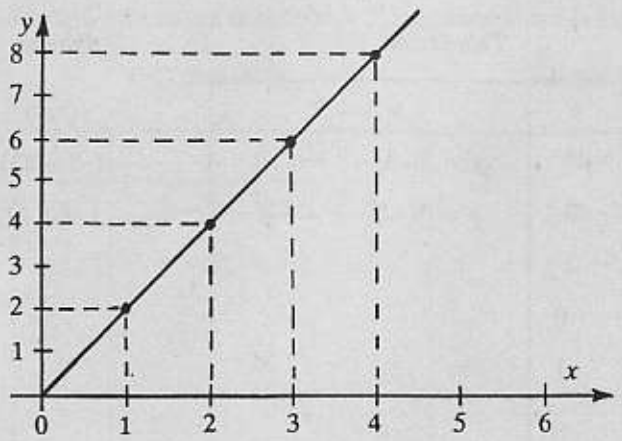
Para referirnos a la gráfica, es necesario recordar que a cada valor del dominio le corresponde un único valor del rango; por lo tanto, cada pareja de la tabulación la podemos representar geométricamente como un punto en el plano cartesiano. El ejemplo siguiente te muestra lo que hemos dicho en este párrafo.

Ejemplo 5

Sea la tabla de valores de una función: $f: x \longrightarrow y$

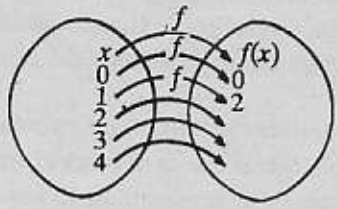
x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Procedemos a graficar cada pareja en el plano cartesiano y observaremos algunas características importantes.



Gráfica 6.

Ahora es necesario encontrar la regla de correspondencia f que liga cada valor de x con su pareja y. Estamos seguros que podrás hacerlo. Para ello completa el diagrama que se ofrece a continuación.



Una vez que has encontrado la regla de correspondencia $f: x \longrightarrow y = 2x$, ¿cómo hemos llegado a ella? Regresemos al análisis de la gráfica.

Como puedes observar, los puntos que componen la gráfica se encuentran sobre una línea recta; esto es muy importante puesto que si quisiéramos encontrar otros puntos, sólo bastaría utilizar la expresión de la función

$$\boxed{y = 2x}$$

aplicándole otros valores de x. Por ejemplo:

Si $x = 7$, entonces $y = 2(7) = 14$, lo que da como resultado la pareja (7, 14).

Si $x = -2$, entonces $y = 2(-2) = -4$ que dan la pareja (–2, –4). Compruébalo.

Lo que has visto hasta este punto es relevante y lo podemos resumir de la siguiente forma:

Una función de la forma $y = ax$ es geométricamente una línea recta que pasa por el origen.

En el siguiente ejemplo tabularemos una función que no pasa por el origen.

Ejemplo 6

Sea la función $y = 3x - 2$, construir una tabulación de ésta y en seguida una gráfica.

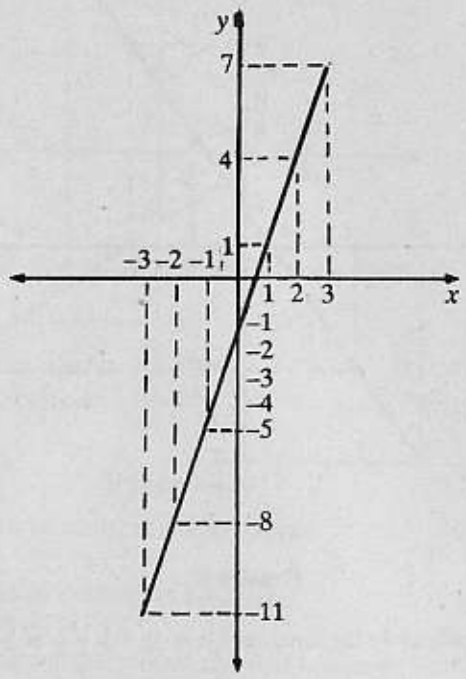
Tabulación

x	$y = 3x - 2$
–3	$y = 3(-3) - 2 = -11$
–2	$y = 3(-2) - 2 = -8$
–1	
0	
1	
2	
3	

Parejas

(x, y)
(–3, – 11)
(–2, – 8)

Ahora grafica $y = 3x - 2$.



Gráfica 7.

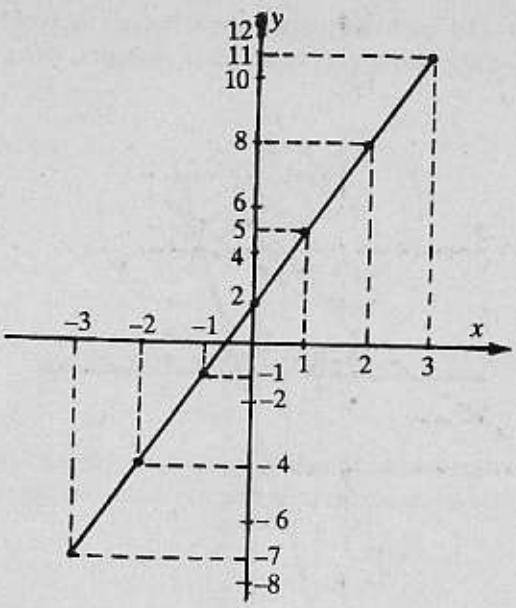
Analicemos brevemente la gráfica de este ejemplo. Lo primero que destaca es que la recta no pasa por el origen, sino que lo hace por el punto (0, –2) ubicado sobre el eje vertical, ¿podrías explicar por qué?

Si no pudiste explicarlo, no te preocupes, pues al final de esta sección podrás hacerlo. Ahora te pedimos modificar la expresión de la función de la siguiente manera:

Sea $y = 3x + 2$.

Observa que en lugar de restar 2 a $3x$, ahora le sumamos 2. Hagamos ahora la tabulación:

Tabulación		*Parejas*
x	$y = 3x + 2$	(x, y)
–3	$y = 3(-3) + 2 = -7$	(–3, –7)
–2	$y = 3(-2) + 2 = -4$	(–2, –4)
–1		
0		
2		
3		



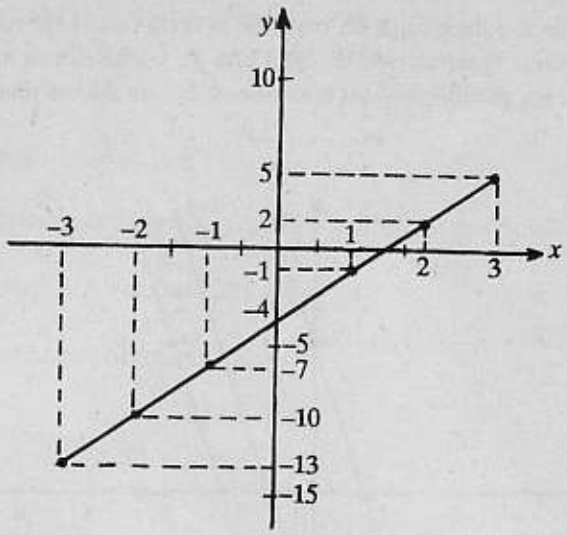
Gráfica 8.

Observa la diferencia entre las gráficas de las funciones $y = 3x + 2$ y $y = 3x - 2$.

Probablemente concluyas que la gráfica sólo se movió hacia arriba del origen, ¿pero, a que se debió esto? Quizá sea necesario hacer otra prueba para estar seguros de que el subir o bajar la gráfica depende de cambiar el número que no multiplica a x en la expresión. Probemos con otra función, por ejemplo:

$$y = 3x - 4$$

x	$y = 3x - 4$
–3	$y = 3(-3) - 4 = -13$
–2	–10
–1	
0	
1	
2	
3	



Gráfica 9.

Comparemos las tres gráficas y expliquemos nuestras observaciones.

Las tres gráficas anteriores han resultado de evaluar las funciones:

$y = 3x - 2$; $y = 3x + 2$; $y = 3x - 4$ y tal parece que forman una feliz familia de funciones, ¿no te parece?

Algebraicamente, las tres tienen la forma genérica:

$$\boxed{y = ax + b,}$$

donde a y b son conocidos como: *parámetros*.[1] Lo que podemos afirmar sobre las gráficas es que el parámetro a no cambia en los tres casos, es decir: $a = 3$; mientras que el parámetro b tomó los valores:

$b = -2$ (caso $y = 3x - 2$)

$b = +2$ (caso $y = 3x + 2$)

$b = -4$ (caso $y = 3x - 4$).

Siguiendo con nuestro análisis, modifiquemos las funciones anteriores aplicando en cada caso $x = 0$.

Parejas

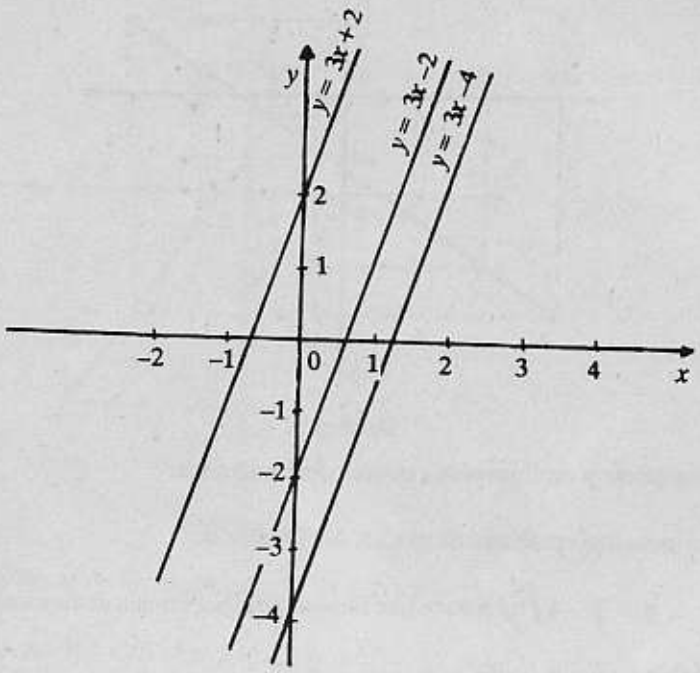
$y = 3x - 2 \longrightarrow y = 3(0) - 2 = -2 \longrightarrow (0, -2)$

$y = 3x + 2 \longrightarrow y = 3(0) + 2 = +2 \longrightarrow (0, +2)$

$y = 3x - 4 \longrightarrow y = 3(0) - 4 = -4 \longrightarrow (0, -4)$

[1] Los parámetros son cantidades que, tomando un valor real particular, permanecen constantes.

Las tres parejas que resultan son los puntos de cruce de la recta con el eje vertical; comprúebalo en la gráfica. Esto ya lo hicimos al construir la tabulación de cada una de las funciones, verifícalo en éstas. Para ver con más claridad lo que hemos hecho, grafiquemos las funciones sobre un mismo plano cartesiano.



Gráfica 10.

Lo que observaste al construir las gráficas anteriores lo podemos resumir de la siguiente manera, como otra conclusión importante:

> Toda función lineal de la forma $y = ax + b$ es una recta sobre el plano cartesiano y el punto de intersección de ésta con el eje vertical depende del valor que tome el parámetro b.

Realiza los siguientes ejercicios para que practiques la construcción de la gráfica de la función lineal a partir de una tabulación.

EJERCICIOS

Serie 2

Grafica la función dada en el plano cartesiano, observando la familia que forman al variar el parámetro b.

1. $y = 2x + b$ para $b = 0 ; b = -2 ; b = 4$

2. $y = 5x + b$ para $b = 0 ; b = -4 ; b = +1$

3. $y = -3x + b$ para $b = 0 ; b = -7 ; b = 3$

4. $y = -x + b$ para $b = -1 ; b = -2 ; b = 4$

5. $y = 4x + b$ para $b = -2 ; b = 5 ; b = 0.5$

6. $y = 0.5x + b$ para $b = 3 ; b = -4 ; b = 1/3$.

Ahora podrás contestar algunas preguntas respecto a la gráfica de una función lineal:

a) Si el parámetro *b* es positivo, ¿en qué parte del eje de las ordenadas (*y*) cruza la recta?

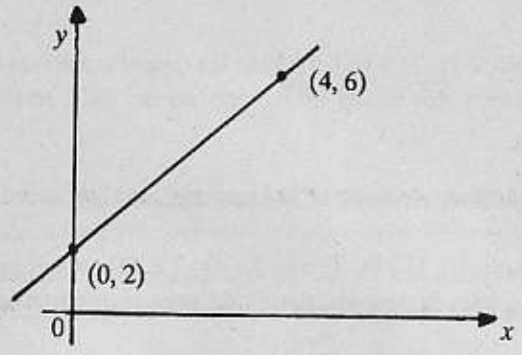
b) ¿Qué sucede si el parámetro *b* es negativo?

c) ¿Qué pasa si $b = 0$?

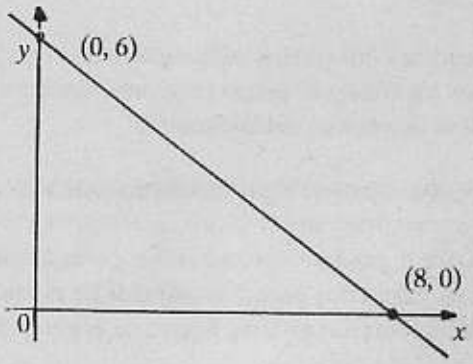
Notas

Ejercicios de la serie 2

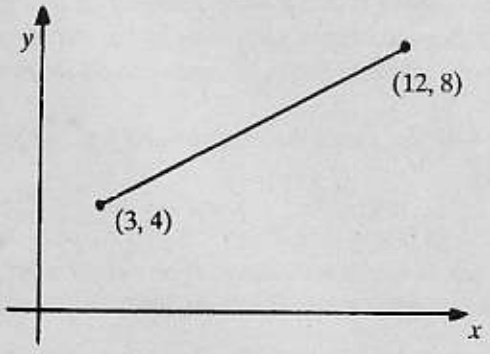
En seguida te ofrecemos gráficas de funciones lineales; encuentra la expresión algebraica de la función en cada caso:



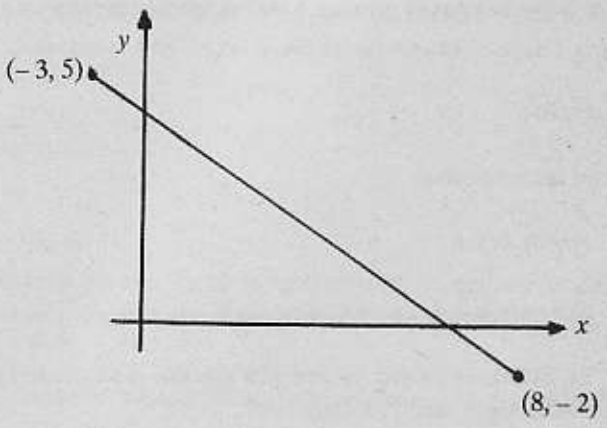
Gráfica 11.



Gráfica 12.



Gráfica 13.



Gráfica 14.

En la serie de ejercicios anterior habrás observado que utilizamos fracciones decimales para el parámetro b, además que éste puede ser positivo o negativo, lo cual da como resultado que la recta intersecte al origen, arriba o abajo de él sobre el eje vertical.

En seguida procederemos al análisis del parámetro a, puesto que esto aclarará las dudas que hayan surgido en el trabajo realizado hasta ahora.

En primer lugar, recuerda que en los ejemplos iniciales de este fascículo, se hizo alusión a cierta constante de proporcionalidad, y en este momento se requiere que interpretemos esa cantidad. Intentaremos hacerlo mediante un ejemplo.

Ejemplo 7

Grafica la función $y = 2x + 1$; para ello construye una tabulación como la siguiente:

x	-2	-1	1	3	5	7
y	-3	-1				

Tomemos dos puntos cualesquiera de la gráfica, por ejemplo, A(1, 3) y B(3, 7). Con los trazos auxiliares formemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento AB. ¿Cuál es la longitud del lado vertical? ¿Cuál es la longitud del horizontal?

Calcula el cociente que resulta de dividir: a = lado vertical/lado horizontal. ¿Cuál es el valor de a?

Repite el proceso tomando otros pares de puntos, por ejemplo, (0, 1) y (3, 7) o (– 2,– 4) y (5, 11). ¿Cuál es valor de a para estos pares? ¡Correcto! Es el mismo que resultó para la primera pareja de puntos que tomamos. ¿Podrías contestar por qué ocurre de esa manera?

Quizá pienses: ¡Qué extraños triángulos!, pero por muy pequeños o grandes que sean, todos conservan la misma razón $a = 2$. Reflexiona un poco más y verás que otras rectas se comportan de igual manera. Te invitamos a que repitas el proceso para las funciones siguientes:

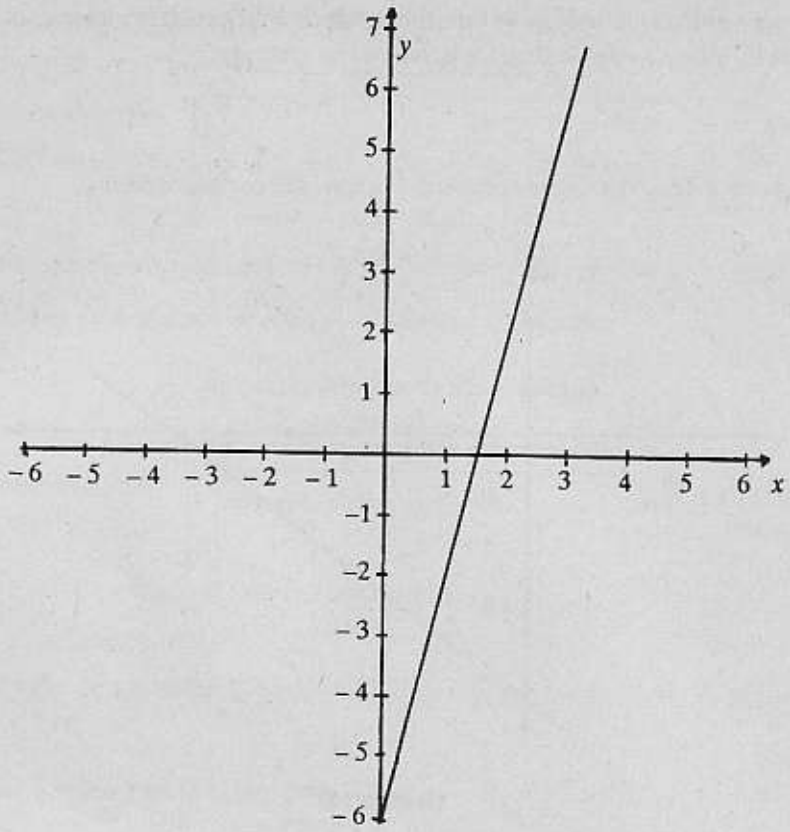
Ejemplo 8

Sean las funciones:

$a) y = 4x - 6$

$b) y = -3x - 2.$

Te ayudaremos con la primera gráfica y tú construye la segunda; encuentra varias parejas de puntos para que calcules la razón en cada caso .



Gráfica 15.

Como podrás darte cuenta, también poseen la característica del ejemplo anterior, pues la razón es la misma en todos los casos. Ahora observa detenidamente cada una de las expresiones de las siguientes funciones:

$y = 2x + 1$ $y = 4x - 6$ $y = -3x - 2$

aquí:

$a = 2$ $a = 4$ $a = -3$.

En esta etapa quizá pienses que el parámetro a de la expresión está relacionado con la inclinación de la recta; en efecto, así es, pero para comprobar esta idea deberás tomar una de las expresiones anteriores para graficarla variando el parametro a, por ejemplo:

Sea $y = 2x + 1$, la cual tiene la forma $y = ax + 1$. Grafiquemos para

$a = 3$; $a = 5$; $a = -3$.

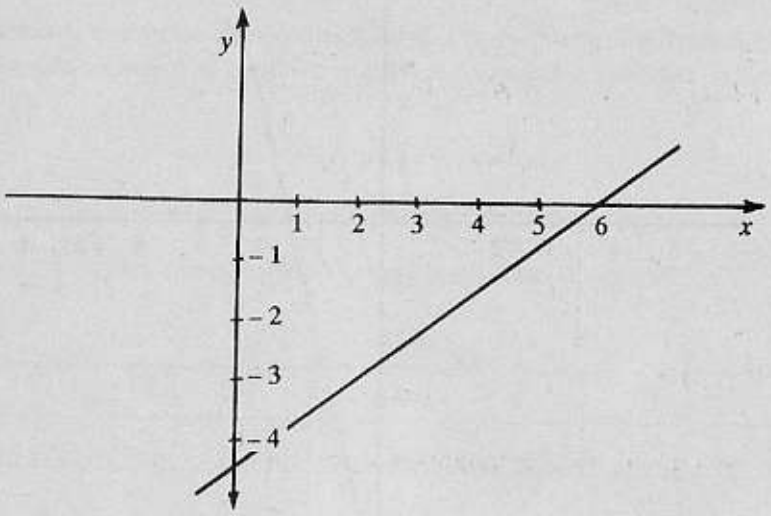
¿Qué sucede con la inclinación de las rectas al cambiar el parámetro a? Efectivamente, la inclinación de la recta respecto al eje positivo de las x varía con a. Esto conduce a otra conclusión importante acerca de la recta:

En toda función lineal cuya expresión sea $y = ax + b$, la inclinación de la recta asociada a ésta depende del valor del parámetro a.

Para concluir nuestro análisis de la función lineal, resolveremos el problema inverso que consiste en encontrar la expresión de la función a partir de su gráfica; veamos un ejemplo.

Ejemplo 9

Para la gráfica de la función lineal siguiente encuentra la expresión correspondiente:



Gráfica 16.

Como puedes ver, la expresión de la función tendrá la forma:

$$y = ax + b.$$

En primer lugar, colócate en el punto donde la recta corta al eje vertical. ¿Cuál es la pareja (x, y) que le corresponde? ¡Correcto!, es $(0,-4)$, entonces el valor de la componente y equivale al parámetro b de la expresión de la función.

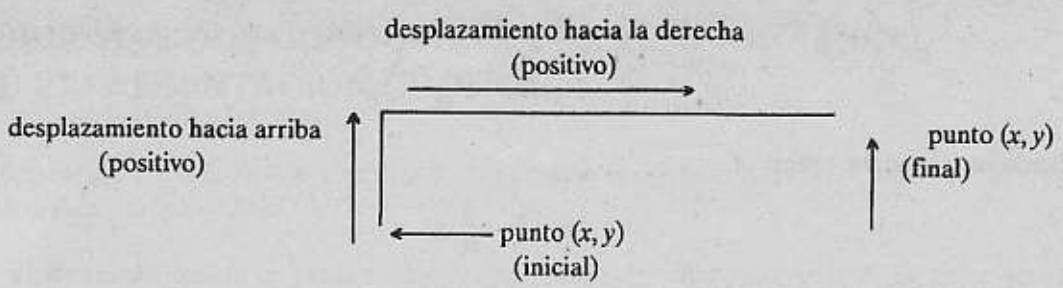
En seguida observa el otro punto de corte de la recta con el eje horizontal. ¿Cuál es ese punto? ¡Exacto!, es $(6, 0)$. ¿Cuántas unidades recorres desde el punto $(0, -4)$ hasta el origen?, ¿cuántas desde el origen hasta el punto $(6,0)$? Este recorrido da como resultado la longitud de los lados del triángulo rectángulo $\overline{BO}$ y $\overline{OA}$ si aplicas la relación:

$$a = \frac{\overline{BO}}{\overline{OA}}$$

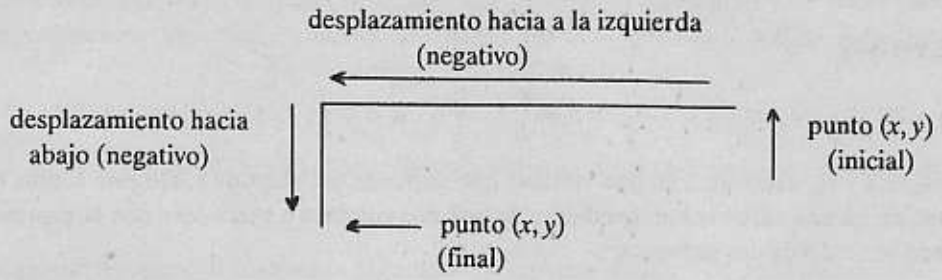
obtienes el valor del parámetro a de la expresión de la función, es decir:

$$a = \frac{4}{6}.$$

Si te das cuenta, hemos tomado la longitud $\overline{BO}$ como positiva. ¿Por qué debemos hacerlo así? Aquí cabe hacer una aclaración que tiene que ver con el sentido del recorrido sobre los lados del triángulo rectángulo: si caminamos hacia arriba y hacia la derecha, como en este ejemplo, entonces consideraremos estos desplazamientos como positivos. Esto nos lleva a completar una tabla de posibilidades como la siguiente:



Para este ejemplo, el valor de a es positivo. Ahora veamos el caso contrario:



Para este ejemplo, el valor de a también es positivo ¿Puedes explicar por qué? Ahora te corresponde explicar los demás casos:

1. Desplazamiento hacia arriba y hacia la izquierda.

2. Desplazamiento hacia abajo y hacia la derecha.

¿Qué signo tiene el parámetro a en cada caso?

Regresando al ejemplo que estamos resolviendo, ya estamos en condiciones de escribir la expresión algebraica de la función:

Si:

$$b = -4 \quad \text{y} \quad a = \frac{4}{6},$$

entonces:

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

será la expresión que se busca. Debes notar que 2/3 resultó de simplificar 4/6.

Finalmente diremos que una ecuación de primer grado con dos incógnitas que tiene la forma:

$$Ax + By = C$$

se puede transformar en una expresión de la regla de correspondencia de una función, si despejamos la incógnita y, esto es:

$$By = C - Ax$$

$$y = \frac{C - Ax}{B}.$$

Separando las fracciones, tenemos:

$$y = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}x,$$

que comparándola con la expresión de la función que tiene la forma:

$$y = ax + b$$

podemos observar que:

$$b = \frac{C}{B} \quad \text{y} \quad a = -\frac{A}{B},$$

es decir, la incógnita y se transforma en una variable que depende del valor de x. De esta forma, esta última se transforma también en una variable independiente, lo que nos conduce a reconocer que la expresión de la función lineal puede verse desde dos enfoques:

a) Como la expresión de la regla de correspondencia f de la función.

b) Como la imagen de x (variable independiente) bajo la regla f.

PROBLEMAS QUE CONDUCEN A UNA FUNCIÓN LINEAL Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La representación geométrica de la gráfica de una función nos permite identificar, según el trazo, alguna de sus características y propiedades.

En el plano coordenado un punto cualquiera es la representación geométrica de un par ordenado, y a cada uno le corresponde un punto; por consiguiente, la función se puede definir como un conjunto de pares ordenados, los cuales se pueden representar geométricamente en el plano cartesiano para obtener su gráfica. Por ello, la gráfica de una función es el conjunto de puntos del plano que representan a los pares ordenados de la función, y la representación geométrica constituye el dibujo donde se visualiza la gráfica de la función, así tenemos:

Ejemplo 1

El precio de un radio es de N$200.00 al contado, pero si se compra en abonos se cobra un interés mensual fijo de N$10.00.

a) ¿Cuánto debe pagarse si se compra al contado o en plazos de 1, 2, 3, 4, 5 o 6 meses.

b) Tabula y construye la gráfica.

c) Anota la expresión algebraica que determina la regla de correspondencia de la función.

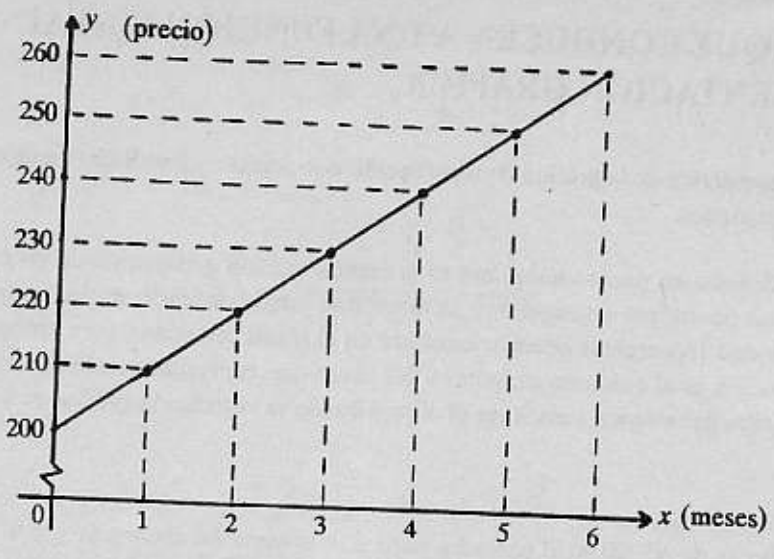
Solución

a) Al comprarlo en abonos se tendrá que pagar:

A un mes	$200 + 10\,(1) = 210$
dos meses	$200 + 10\,(2) = 220$
tres meses	$200 + 10\,(3) = 230$
cuatro meses	$200 + 10\,(4) = 240$
cinco meses	$200 + 10\,(5) = 250$
seis meses	$200 + 10\,(6) = 260$

b) Los datos anteriores nos dan la tabla y la gráfica siguientes:

x	$y = f(x)$
0	200
1	210
2	220
3	230
4	240
5	250
6	260



Gráfica 17.

c) Por lo tanto, la cantidad que debe pagarse en un plazo de x meses es:

$$f(x) = 200 + 10x,$$

la cual es la expresión algebraica que determina esta función.

Ejemplo 2

Patricia pide prestado a Inés N$500. Inés le dice que le da seis meses de plazo para pagarle, cobrándole N$10 de interés por cada mes.

a) Cuánto tendrá que pagar Patricia si le paga a Inés el mismo día o en 1, 2, 3, 4, 5 o 6 meses.

b) Tabula y construye la gráfica

c) Encuentra la expresión algebraica que determine la función que describe al problema.

Trata de encontrar la solución antes de ver lo que se te presenta a continuación.

Solución

a) Tendremos que designar una incógnita que represente el número de meses, que en nuestro ejemplo será x. Entonces:

Para cero meses, Patricia pagará N$500 + N$0 interés

Para un mes, N$500 + N$10 de interés

Para dos meses, N$500 + N$20 de interés.

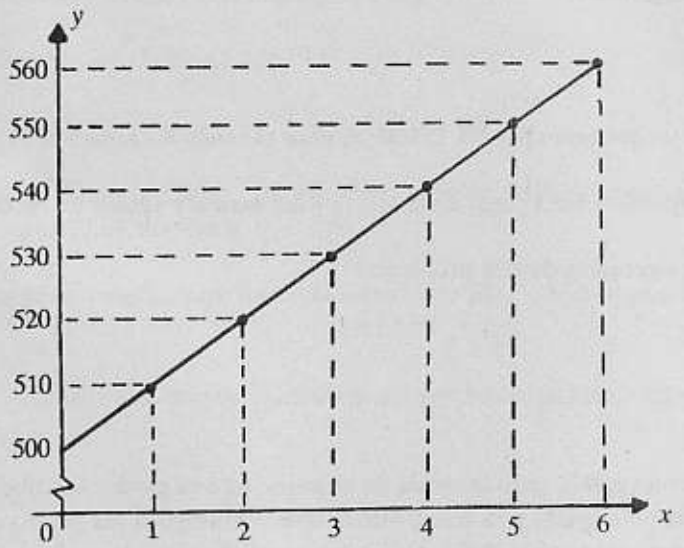
Para tres meses, N$500 + N$30 de interés.

¿Cuánto deberá pagar los meses restantes del plazo?

b) Si tabulas los datos anteriores tendrás la siguiente tabla:

x	y
0	500
1	510
2	520
3	530
4	540
5	550
6	560

Por lo tanto, la gráfica es:



Gráfica 18.

c) Con base en la proposición del inciso *a*) podemos establecer la expresión solicitada, que es:

$$f(x) = 10x + 500.$$

Te habrás dado cuenta que si damos valores a x (variable independiente) para encontrar los respectivos valores de y (variable dependiente) y además unimos los puntos en el eje coordenado, éstos forman una recta que representa la gráfica de una función lineal cuyo modelo algebraico es:

$\boxed{y = ax}$ cuando la recta cruza el origen

$\boxed{y = ax + b}$ cuando la recta no cruza el origen,

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Realiza los siguientes problemas aplicando los conocimientos adquiridos acerca del valor numérico de una expresión algebraica, la construcción de su representación gráfica y el establecimiento de su modelo algebraico, los cuales te aportarán información sobre el comportamiento de algunos fenómenos físicos y posibles interpretaciones para predecir resultados.

Problema 1

El señor Ávila renta un auto en N$50.00 diarios más N$2.50 por kilómetro recorrido:

a) Calcula el gasto que le produce recorrer en un día 40, 60, 90, 120 o 160 kilómetros, y tabula los resultados.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica de este problema?

c) Grafica la expresión algebraica.

Problema 2

La compañía Delta obtuvo un préstamo por N$ 15 000.00, pero el banco le cargará el 3% mensual de intereses:

a) Calcula lo que la compañía deberá pagar en 0, 1, 2, 3, 4 o 5 meses, y tabula los resultados.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica de este problema?

c) Grafica los resultados.

Problema 3

La señora Lulú va a hornear un pastel, pero la escala de su horno está en grados farenheit y su receta indica grados centígrados, entonces le pide ayuda a su hijo y éste le dice: "Multiplica los grados centígrados por 9/5 y al resultado le sumas 32 y tendrás grados farenheit". Con este enunciado obtén lo siguiente:

a) Los grados farenheit cuando la señora Lulú utilice el horno en 100, 115, 135 y 145 grados centígrados, y tabula los datos.

b) La expresión algebraica del problema.

c) Los resultados mediante una gráfica.

Si tuviste alguna duda o dificultad y no pudiste resolver los problemas, acude con tu profesor o asesor, quienes seguramente te señalará cuáles fueron tus errores.

Los siguientes problemas tienen como propósito aclarar totalmente tus dudas, y que comprendas que las funciones lineales son modelos algebraicos.

Problema 4

En la prueba de tiempo durante una práctica de carreras de autos, uno de ellos registró los siguientes resultados:

En una hora recorrió 80 km; en dos horas, 160 km; en tres horas, 240 km; en cuatro horas, 320 km y en cinco horas, 400 km. La distancia que recorre el auto está en función entonces del tiempo, por lo tanto:

a) Construye la gráfica del problema.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que denota la distancia recorrida en función del tiempo?

Problema 5

Como la circunferencia de un círculo está en función de π veces su diámetro, entonces:

a) ¿Cuál es la circunferencia del círculo cuando el diámetro mide 1, 2, 3, 4 o 5 metros?; tabula los resultados.

b) Encuentra la expresión algebraica del problema.

c) Construye la gráfica.

Problema 6

La estatura de un hombre se puede calcular, conociendo la medida del hueso húmero, la cual se multiplica por 2.89, y al resultado se le suma 70.64, entonces:

a) ¿Cuál es la estatura de un hombre cuyo hueso húmero mide 30, 33, 37 o 40 centímetros?; tabula los resultados.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que da la estatura del hombre cuyo hueso húmero tiene x centímetros de largo?

c) Construye la gráfica.

La siguiente serie de ejercicios te permitirá visualizar la relación entre función lineal y una ecuación de primer grado con dos incógnitas, así como la representación gráfica de la expresión algebraica.

EJERCICIOS

Serie 3

1. Un trabajador gana N$45.00 por hora y su sueldo diario depende del número de horas que trabaje. Calcula:

a) ¿Cuánto gana diariamente si trabaja 8 horas?

b) ¿Cuánto gana diariamente si trabaja 2, 3, 4, 5 o 7 horas; tabula los resultados.

c) ¿Cuál es la expresión algebraica del problema?

d) Grafica los resultados.

2. El tanque de gasolina de un auto tiene una capacidad de 40 litros; si el auto tiene un rendimiento de 10 km/L, entonces:

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que describe la cantidad de gasolina que hay en el tanque después de recorrer una distancia x?

b) ¿Cuántos litros quedan en el tanque después de recorrer 0, 15, 30, 50, 80 o 400 km?; tabula los resultados.

c) Construye la gráfica.

3. El metro cuadrado de un terreno tiene un valor de N$200.00. Determina:

a) La expresión algebraica que describa el costo del terreno si su área es de x metros cuadrados.

b) ¿Cuánto cuesta adquirir 10, 20, 30 o 40 metros cuadrados; tabula los datos.

c) Construye la gráfica.

A continuación reflexionemos sobre el primer ejemplo que se incluye en el Cuestionamiento guía, pues consideramos que ya tienes los elementos necesarios para resolverlo.

El problema señala que la frecuencia con que cantan los grillos está en función de la temperatura ¿Lo recuerdas? Trata de resolverlo siguiendo el procedimiento algebraico y apoyándote en la tabla de valores del problema. También te sugerimos construir la gráfica del mismo. Si tienes alguna duda consulta a tu profesor o asesor. Finalmente resuelve por ti mismo el segundo problema del Cuestionamiento guía.

Este es el momento para un breve resumen de los conceptos que hemos estudiado en este fascículo.

Recuerda que los valores de la *función lineal* se pueden registrar mediante una tabla de valores. Ésta asigna a cada valor de x (variable independiente) un solo valor a y (variable dependiente), es decir:

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
.	.
.	.
.	.
x_n	y_n

Los valores de la función se obtienen a través de la regla de correspondencia:

$$y = f(x),$$

o bien,

$$f(x) = ax + b,$$

donde a y b son constantes y a diferente de cero.

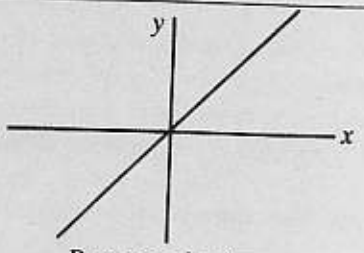
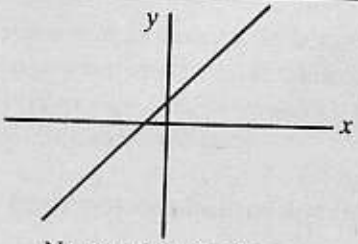
El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de la tabla representan puntos en el plano cartesiano, los cuales determinan la gráfica de la función lineal al unirlos por medio de una línea recta; esto nos lleva a una conclusión importante:

La gráfica de la función lineal es una línea recta.

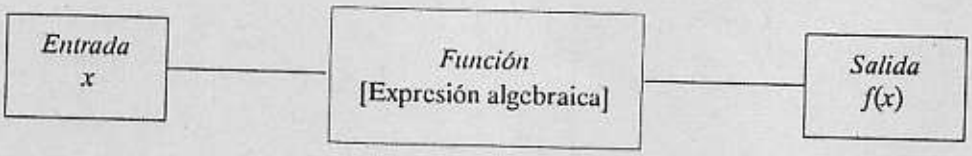
RECAPITULACIÓN

A continuación te presentamos una síntesis de los aspectos más relevantes de este fascículo.

Modelos algebraicos: Ecuación de primer grado con dos incógnitas.

De la forma:	De la forma:
$y = ax$, donde a es una constante y es diferente de cero.	$y = ax + b$, donde a y b son constantes y a es diferente de cero.
La gráfica es:	La gráfica es:
 Pasa por el origen	 No pasa por el origen

El siguiente diagrama te muestra cómo se forma una función.



Entonces, podemos concluir que la regla de correspondencia de una función lineal es:

$y = mx$ o $y = mx + b$

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Para reafirmar los conocimientos adquiridos hasta aquí, te sugerimos resolver los siguientes problemas.

1. Con base en la siguiente expresión, y utilizando tu imaginación, redacta el problema que justifique la función; tabula los datos (desde 5 hasta 30 de 5 en 5) y construye la gráfica.

$$f(x) = (9/5)x + 32$$

2. El área de un cuadrado está en función de la medida de uno de sus lados; calcula el área del cuadrado si uno de sus lados mide 1, 2, 4 o 5 metros; tabula y construye la gráfica e indica si es una función lineal. Comenta el resultado con tu profesor o asesor.

3. Compara y analiza los siguientes enunciados para establecer la relación entre la ecuación de primer grado con dos incógnitas y la función lineal, recordando sus definiciones y obteniendo las conclusiones pertinentes. Coméntalas con tu profesor o asesor.

a) El consumo de agua en un hotel es aproximadamente de 2 150 litros por día, y la cisterna tiene una capacidad de 15 000 litros. Encuentra la ecuación de primer grado con dos incógnitas que exprese este enunciado.

b) La luz viaja a 300 000 km/seg, entonces:

–¿Cuál es la distancia que recorre un rayo de luz que tiene una velocidad constante durante 2, 4, 6 u 8 segundos? Construye la gráfica correspondiente.

–¿Cuál es la expresión algebraica de este enunciado?

LINEAMIENTOS DE AUTOEVALUACIÓN

A continuación te proporcionamos las respuestas de algunos de los problemas de las Actividades de consolidación. Complétalas y verifica tus propias respuestas.

Soluciones

1. La redacción del problema puede ser: Se sabe que un grado farenheit equivale a 9/5 de un grado centígrado más 32. Con este enunciado y la expresión algebraica, ¿puedes graficar la función? Verifica tu respuesta.

2. El área de un cuadrado está expresado por $A = l^2$, si hacemos l(lado) como x, tendremos que el área es:

$$A = x^2,$$

donde la longitud del lado del cuadrado es x. ¿Puedes construir la tabulación de la expresión anterior? Si es así, grafica la tabulación y comenta el resultado con tu profesor.

3.

a) La expresión algebraica es:

$$y = 15\,000 - 2\,150x,$$

donde x son los días.

b) La tabulación es:

tiempo (t)	2	4	6	8
distancia (y)	6×10^5	12×10^5	18×10^5	24×10^5

¿Puedes construir la gráfica con la tabulación anterior? Inténtalo...

La expresión algebraica es: $y(t) = vt$.

Estas soluciones parciales a las Actividades de consolidación te ayudarán a verificar tus respuestas o bosquejar posibles soluciones, si no llegaste a ellas.

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN

Los siguientes problemas te permitirán identificar la utilidad que tiene lo que has aprendido respecto a la función lineal y la ecuación de primer grado con dos incógnitas en diferentes asignaturas. Te sugerimos seleccionar las escalas correctas para que logres la máxima claridad en las gráficas.

EJERCICIOS

Serie 3

1. En Biología hay una regla aproximada llamada *regla bioclimática* para las zonas templadas, la cual establece que en la primavera y al principio del verano, algunos fenómenos periódicos, tales como la florescencia de ciertas especies, la aparición de ciertos insectos y la maduración de los frutos, por lo general se retardan alrededor de 4 días por cada 500 pies de altura; la expresión es:

$$d = 4(h/500),$$

donde d es el cambio en días y h es el cambio de altitud en pies (ft). Construye la gráfica de la ecuación desde cero hasta 4 000 pies, variando la altitud cada 500 pies.

2. En electrónica, un circuito eléctrico simple tiene una resistencia de 30 ohmios, como la que tienen las linternas; la corriente del circuito I (amperios), y la fuerza electromotriz, E (voltios), están relacionadas por la ecuación:

$$E = 30I.$$

Construye la gráfica de esta ecuación desde cero hasta un amper, variando la corriente de 0.1 en 0.1.

3. En cálculos de interés simple la cantidad devengada, S (monto), es un función lineal del tiempo medido en años:

$$S = P + Prt.$$

Calcula S transcurridos 15 años, si el capital, P, es igual a N$100.00 y la tasa anual de interés, r, es igual a 4%. ¿En qué momento el monto es igual a N$220.00?

4. La depreciación directa o lineal supone que un artículo pierde todo su valor inicial de A dólares durante un periodo de n años. Si un artículo que cuesta 20 000 dólares cuando está nuevo, se desprecia linealmente por un periodo de 25 años, determina la función lineal dando su valor, V, en dólares, después de x años (desde cero hasta 25 años). ¿Cuál es el valor después de 10 años?