COLEGIO DE BACHILLERES

DIRECCIÓN DE PLANEACIÓN ACADÉMICA

COORDINACIÓN DEL SISTEMA DE ENSEÑANZA ABIERTA

MATEMÁTICAS III

FASCÍCULO I

LÍNEAS Y ÁNGULOS. ESTUDIO DEL PRIMER POLÍGONO: EL TRIÁNGULO

Bernardino A. García Mías
Rodolfo Moisés Velasco Ortiz

INTRODUCCIÓN

La Matemática es el idioma de la ciencia y la técnica; quien no la conozca no podrá entender obras especializadas de electrónica o electricidad ni revistas científicas; tiene que limitarse a vivir en el mundo de la práctica donde las cosas se aprenden por rutina y se memorizan sin márgenes aceptables de exactitud.

Cualquier persona que quiera salir de este círculo vicioso debe estudiar la Matemática. Así advertirás que con sólo recordar los conceptos aprendidos y las situaciones reales podrás resolver problemas con un grado de dificultad mayor y estarás capacitado para entender conceptos científicos. Las fórmulas de la Geometría las deducirás por razonamiento sin necesidad de aprenderlas de memoria.

El estudio de la Geometría es básico para todas las personas, sin importar a lo que se dediquen. A la vez, es necesaria, pues constantemente estamos geometrizando los fenómenos que nos rodean. En cada tema que se desarrolla en este fascículo se presenta en forma lógica y agradable desde la definición del punto, la formación de la línea, hasta los polígonos, tanto regulares como irregulares, y en especial el triángulo. Las fórmulas se deducen por razonamiento intuitivo y se demuestran por sí misma merced a representaciones gráficas adecuadas en cada caso. A partir de algunas propiedades fundamentales y con ayuda del Álgebra, deducirás todas las demás propiedades de la Geometría, sin necesidad de memorizarla.

Si deseas profundizar sobre los temas que se presentan en este fascículo, te sugerimos revisar la bibliografía que proporcionamos al final.

ESTUDIO DE LÍNEAS Y ÁNGULOS

Seguramente te has preguntado ¿para qué estudio Matemáticas? y tal vez has pensado que estudias una materia que no tiene aplicación. Si a pesar de los cursos anteriores aún tienes este concepto erróneo, no desaproveches la oportunidad que te ofrece éste para poner en práctica tus conocimientos.

LÍNEAS

Si observas lo que nos rodea: edificios, muebles, automóviles, libros, etc., y recuerdas un poco lo que estudiaste en Geometría, podrás establecer una relación con los cursos anteriores. Por ejemplo, nadie pondría en duda la semejanza de la mayoría de los edificios con los prismas rectangulares, las puertas y ventanas con los rectángulos, las llantas de los automóviles con la circunferencia, etc. Con base en estas observaciones tratemos de deducir los conceptos que vamos a manejar. Tomemos como referencia el siguiente ejercicio.

Supón que te piden dibujar el edificio de la figura 1. ¿Qué harías primero? Recuerda los pasos que sigue un dibujante para realizar su trabajo: Primero, esbozar el contorno de la figura con líneas como en la figura 2, pero estas líneas ¿en realidad existen?, ¿qué representan? Con el estudio de este fascículo podrás contestar estas interrogantes y muchas más que quizá te has planteado.

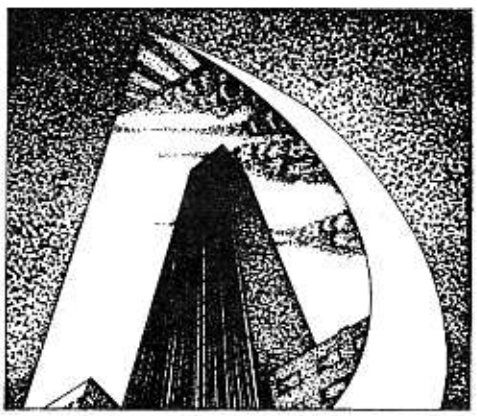


Figura 1.

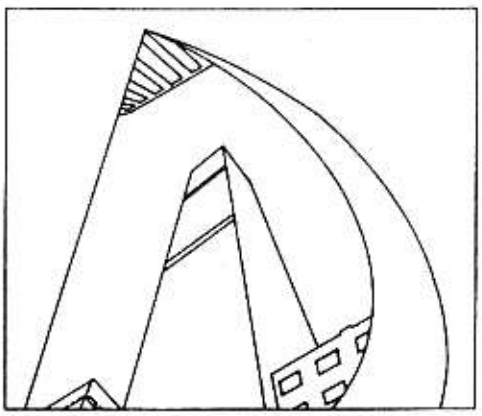


Figura 2.

Consideremos otro ejemplo, todos aceptamos que esta hoja está limitada por cuatro líneas rectas que señalan la superficie de la misma y la separa del espacio que la rodea. Pero, ¿a quién pertenece la línea?, ¿a la hoja o al espacio? Más claro aún, si ponemos en contacto dos hojas de papel por uno de sus bordes, estarían separadas entre sí por una línea recta, pero ésta no es más que la manera de representar el contacto de los bordes de las hojas, sin formar parte de ninguna de ellas, y de la cual podríamos medir su longitud pero no su anchura, por mínima que pudiera ser, entonces hablaríamos de una superficie limitada por líneas rectas. Por ejemplo, un renglón de tu cuaderno representa una línea, pero si lo observas al microscopio podrás ver que la tinta tiene cierta anchura; en realidad entendemos por línea lo que limita la tinta del resto de la hoja.

Con base en lo anterior, no es posible establecer una definición de línea, sólo manejaremos el concepto. Da un ejemplo de lo que entiendes por línea?

Al observar en el microscopio la fotografía de la figura 3, ¿qué es lo que se ve a través de la lente? (figura 4). Fíjate que la fotografía está compuesta por una gran cantidad de manchas de diferentes tonalidades que en un

momento dado se pueden considerar como puntos; pero, ¿qué sucede si aislamos una sola mancha y la observamos con una lente más potente? Seguramente observarás que está compuesta de otras más pequeñas, y más aún, recordando lo que nos han enseñado en la materia de Química, deducimos que la mancha más pequeña está compuesta por átomos de los elementos con los que se elaboró la tinta; a los átomos también los consideramos como puntos. Pero esto no termina aquí, pues los átomos se componen de otras partículas y así podríamos continuar hasta el infinito. Por esto, al igual que la línea, no podemos dar una definición precisa de punto. Retoma estos datos y establece tu propio concepto de punto.



Figura 3.

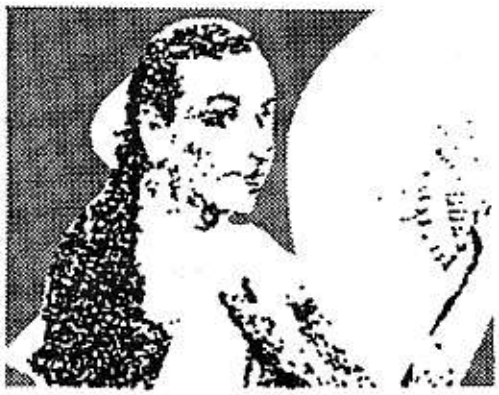


Figura 4.

En este fascículo consideraremos el punto como la parte elemental de la extensión, por tanto, no tiene longitud, anchura ni profundidad y sólo nos indica una posición en el plano o espacio. Cita algún ejemplo de punto.

Conjugando los conceptos de línea y punto es factible establecer que una línea representa un conjunto de puntos, cuya disposición dará la característica y nombre a los diferentes tipos de líneas. ¿Crees que todas las líneas son idénticas?, ¿cuántos tipos conoces?

La consideración anterior se hace necesaria para caracterizar a cada una de las diferentes líneas que existen, por ejemplo, la que nos interesa es la recta, que seguramente recuerdas. ¿Estarías de acuerdo con la propuesta de que la línea recta es un conjunto de puntos dispuestos en una misma dirección?, ¿por qué? ¿Crees que este conjunto se extiende infinitamente en uno y otro sentido?, ¿por qué? Si tus respuestas son negativas, genera tu propia idea y discútela con tu profesor o asesor.

Ahora observa las paredes y los pisos donde te encuentras, o la superficie de esta hoja, o la de tu mesa. Si consideramos que estas superficies están limitadas por dos dimensiones (largo y ancho), que son planas, aunque hablemos de superficies limitadas, en sentido estricto esas dos dimensiones se refieren a dos líneas rectas y sabemos que se extienden infinitamente, entonces el plano también se extenderá de la misma manera. Con estos elementos elabora un concepto de plano.

¿Estás de acuerdo en que un plano es una extensión que se prolonga infinitamente en dos dimensiones (largo y ancho)? Sugiere algunos ejemplos de plano y coméntalos con tu profesor o asesor. Ya tenemos una idea de punto, recta y plano. Ahora busquemos una forma de nombrarlos; iniciemos con el punto. ¿Cómo distingues un punto entre muchos?, ¿cómo expresarías que nos estamos refiriendo a uno en especial?

Si quisiéramos designar a un punto en la recta o en el plano basta con llamarlo punto *A* ,*B, C,* etc. (figura 5). ¿De qué otra forma lo nombrarías?



Figura 5.

Continuemos con la línea recta. ¿Cómo la designarías? Normalmente se hace tomando dos puntos cualesquiera de ella y se coloca encima de las literales para designar a dichos puntos, una flecha con dos sentidos que indica que la línea recta se extiende infinitamente hacia ambos extremos; por ejemplo, ¿cómo identificarías la recta de la figura 6?

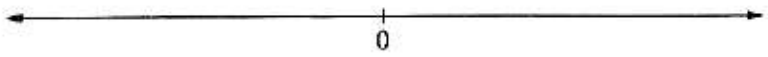


Figura 6.

Se toman dos puntos cualesquiera de ella, digamos A y B, colocando encima de las literales la flecha de doble sentido AB (figura 7) lo cual se lee recta AB. ¿Es conveniente esta forma? ¿Puedes sugerir otra? Argumenta tus respuestas.

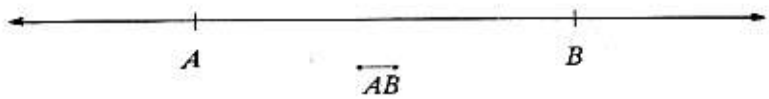


Figura 7.

Bien, ¿crees que es manejable una línea recta que se extiende infinitamente hacia un lado y otro?, ¿por qué? Si crees que no es muy práctico, ¿qué sugieres para limitarla?, ¿se puede hablar de una semirrecta?, ¿qué entiendes por esto?

Si consideramos una semirrecta entonces tendríamos que hablar del origen y tomar solamente la extensión en un solo sentido; por ejemplo, la semirrecta de la figura 8, inicia en un punto designado origen (O) y se entiende en un solo sentido. Para nombrarla tomamos otro punto cualquiera (digamos A), y colocamos encima de ellos una flecha sencilla, así: $\overrightarrow{OA}$, que se lee semirrecta OA (figura 9). ¿Podríamos limitar aún más la recta?, ¿es claro que podemos tomar una parte de ella? Supongamos que sólo queremos manejar un segmento de la recta de la figura 10 comprendido entre los puntos A y B. ¿Cómo se llama esta sección?

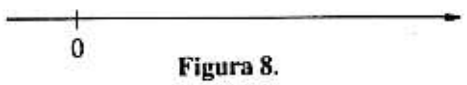


Figura 8.

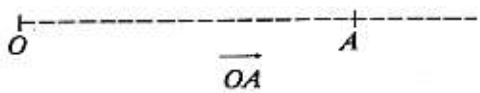


Figura 9.

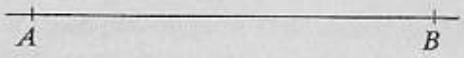


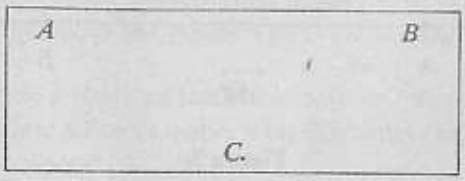
Figura 10.

Si tomamos dos puntos cualesquiera, digamos A y B, e indicamos *segmento* con una raya encima, $\overline{AB}$, significa segmento AB. ¿Se te ocurre una mejor idea para representarlo? Observa que en $\overline{AB}$ quitamos la cabeza a la flecha lo que nos indica su sentido finito y de esta manera delimitamos la porción de la recta que corresponde a un segmento.

Contesta las siguientes preguntas: ¿Cuántas líneas rectas puedes pasar por dos puntos cualesquiera? Entre dos puntos cualesquiera, ¿qué línea corresponde a la distancia más corta entre ellos? Comenta tus respuestas con tu asesor o profesor.

Si contestaste sin dificultad, da respuesta a las siguientes: por tres puntos no alineados en el espacio ¿cuántos planos puedes pasar?, ¿cuántos puntos son necesarios para ubicar un plano?

Para contestar estas preguntas traza tres puntos no alineados en una hoja, colócala en posiciones diferentes en el espacio, y deduce de qué manera se nombra a ese plano. Sabemos que por tres puntos no alineados sólo hay un plano, (es suficiente con tomarlos para denotarlo), si el plano pasa por los puntos A, B, C, como se muestra en la figura 11, probablemente ya tengas una idea clara de los conceptos punto, recta y plano, ahora analizaremos lo que sucede cuando dos rectas se encuentran en un plano. Para entender mejor lo que sucede realiza la siguiente actividad que te ayudará a visualizarlo mejor.



Plano ABC

Figura 11.

Sobre una superficie que represente un plano (tu cuaderno, la mesa, etc.) coloca dos lápices de manera que simbolicen dos líneas rectas en diferentes posiciones. Si repites el procedimiento obtendrás algo similar a lo que se muestra en de la figura 12. Además de esas formas, podrás encontrar otras variantes, pero si observas con cuidado verás que sólo hay dos posiciones básicas (figuras 13 y 14).

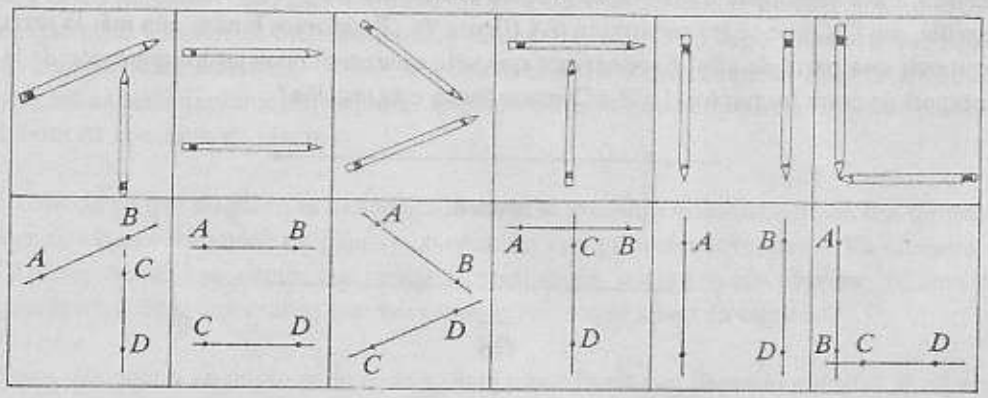


Figura 12.

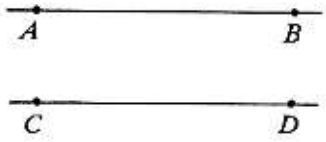


Figura 13.

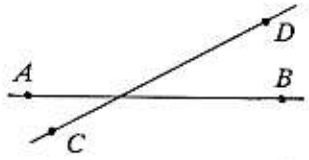
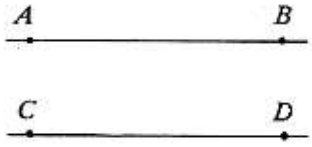


Figura 14.

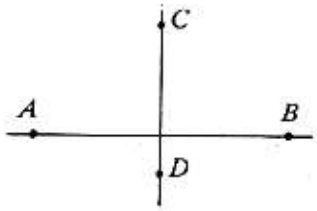
En la figura 13, la principal característica es que la distancia entre los lápices, a lo largo de ellos, es siempre igual. ¿Recuerdas cómo se nombran a las rectas que tienen esta característica?. Se considera también el caso de que la distancia entre ellas sea cero; es decir, que las rectas estén sobrepuestas. En la figura 14 tenemos que ambas rectas inciden o se cruzan en un punto, es decir, tienen un punto único en común. ¿Sabes de cuántas maneras se puede hacer incidir o cruzar dos líneas rectas? Estarás de acuerdo en que hay infinitas formas, pero sólo una en especial, ¿imaginas cuál es? Sí, cuando los dos lápices (líneas rectas) inciden de tal manera que la abertura entre ellos es exactamente la misma de un lado que de otro. ¿Cómo se le llama a este tipo de rectas? Y cuando las aberturas son diferentes, ¿cómo se les llama a las rectas que se cortan? Anota en el paréntesis el número que corresponde a cada caso.

Oblicuas no perpendiculares (3)



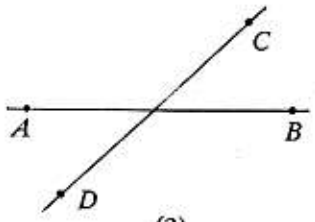
(1)

Paralelas (1)



(2)

Perpendiculares (2)

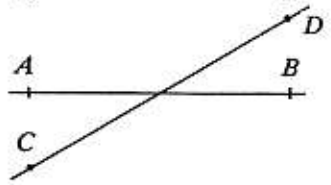


(3)

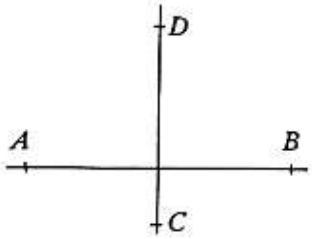
Para denotar cada relación entre las rectas es necesario generar una nomenclatura. ¿Te imaginas cómo sería? Contesta la pregunta anterior y después comparála con lo que te presentamos a continuación. En este caso decimos:



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (*AB* paralela *CD*)



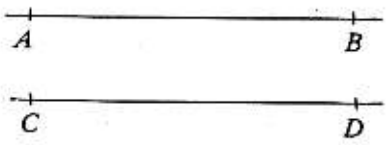
$\overleftrightarrow{AB} \not\perp \overleftrightarrow{CD}$ (*AB* oblicuas y no perpendicular a *CD*)



$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (*AB* perpendicular a *CD*)

Has comprendido la posición que tienen las líneas rectas en un mismo plano. De las dos posiciones, las rectas paralelas son las que han generado polémica entre los matemáticos, tanto que se han creado nuevas formas de geometría (o nuevas geometrías).

¿Por qué las rectas paralelas? Consideremos dos rectas paralelas (figura 15):



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

Figura 15.

Si sobreponemos AB en CD, ¿seguirán siendo paralelas? esto es cierto, ya que las líneas no tienen espesor; por tanto, por más líneas que se sobrepongan siempre estaremos en la misma recta, puesto que un axioma de la geometría que nos ocupa, la *euclidiana*, afirma que por dos puntos pasa una y sólo una recta.

Contesta esta pregunta: por un punto exterior de una recta, ¿cuántas paralelas a dicha recta puedes pasar? Esta cuestión ha dado lugar a otras geometrías de acuerdo a los supuestos, definiciones o axiomas que se establecen. Discútelo con tu profesor o asesor.

ÁNGULOS

Tomando como base las diferentes posiciones que se generan al trazar dos rectas en el plano, definamos un nuevo concepto, el ángulo. La primera posición por analizar será aquella en que las rectas están separadas la misma distancia en cualquiera de sus puntos, es decir, son paralelas, y más específico aún cuando la distancia entre ellas es cero o lo que es lo mismo, están sobrepuestas, tomemos un punto común a ambas y llamémosle O (origen), entonces hablaremos de semirrectas. Para darnos una mejor idea, imaginemos que la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ está sobrepuesta a su paralela $\overrightarrow{OA}$ (figura 16).

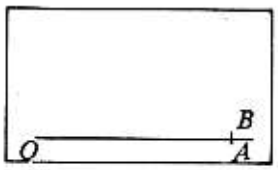


Figura 16.

En la figura 17 se mantiene fijo el origen de ambas semirrectas, pero la distancia de A a B se modifica girando OB alrededor de O. Observemos que por mínima que sea la modificación abriremos un espacio entre ambas semirrectas.

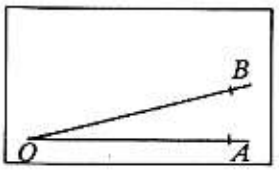


Figura 17.

Si mantenemos el origen común y seguimos modificando la distancia de A a B, obtendremos tantas posiciones como movimientos hagamos. ¿Qué generamos con el giro? La respuesta es semirrectas no perpendiculares (figura 18).

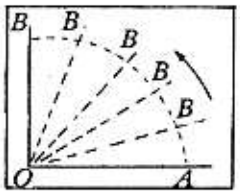


Figura 18.

¿Hasta dónde será significativo detener el movimiento? Es conveniente hasta que tengamos una posición conocida, como son las perpendiculares cuyo giro es mayor que cualquiera de los antes obtenidos (figura 19). Este movimiento lo puedes observar también con un abanico, las manecillas del reloj, cuando abres una puerta, etc. Entre la posición original (semirrectas coincidentes) y la posición final (semirrectas perpendiculares), ¿puede haber infinitas posiciones?, ¿cómo se llaman cada una de esas posiciones? Si estás de acuerdo en que se llaman ángulos, contesta la siguiente pregunta, si no, analiza lo anterior con tu asesor: ¿Las perpendiculares son la máxima abertura que podemos tener entre dos semirrectas?, o podríamos seguir moviendo OB de tal manera que obtengamos la forma de la figura 20.

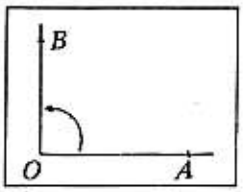


Figura 19.

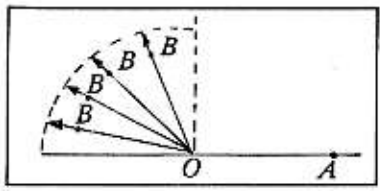


Figura 20.

Si estás de acuerdo en que se puede seguir girando $\overrightarrow{OB}$, como en la figura 20, ¿hasta dónde es conveniente detener el movimiento?

Es claro que otra posición significativa es la que ilustra la figura 21, donde $\overrightarrow{OB}$ no está superpuesta con $\overrightarrow{OA}$, sino que más bien $\overrightarrow{OB}$ es continuación de $\overrightarrow{OA}$ y la abertura obtenida es mayor que las anteriores.

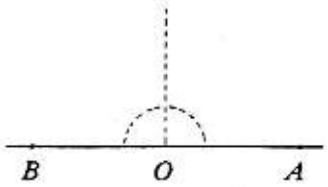


Figura 21.

¿Es posible efectuar los mismos movimientos, en la parte inferior? Sí, y las posiciones significativas a donde llegaríamos serán las que se muestran en la figura 22.

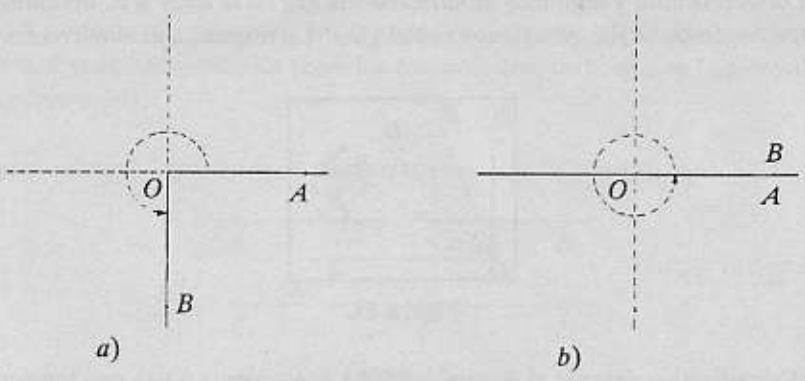


Figura 22.

¿Qué sucedió en la figura 22 *b*)? Volvimos a la posición original, sólo que para hacerlo tuvimos que describir un giro completo. Se dijo antes que a cada una de las posiciones generadas al girar *OB* se le llama *ángulo*. ¿Puedes dar una definición precisa de ángulo? ¿cuántas posiciones significativas se dieron en el barrido? ¿qué diferencia hay entre los ángulos generados entre la primera posición característica y la segunda?, ¿entre la segunda y la tercera?, ¿entre la tercera y la cuarta?

Recuerda que existen ángulos agudos, rectos, obtusos, llanos, entrantes y perigonales. ¿Las figuras 23 *a*) a 23 *f*)representan las diferentes formas que pueden tener los ángulos? ¿Podrías nombrarlos relacionando las figuras con la lista anterior? (anota en el paréntesis el nombre correspondiente).

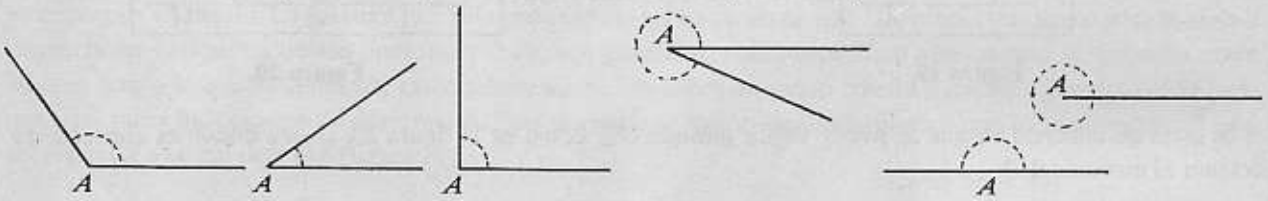


Figura 23.

Observa la figura 24 y busca una notación que indique claramente que nos estamos refiriendo a ese ángulo sin necesidad de trazarlo.

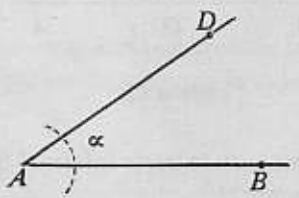


Figura 24.

¿Te convence alguna de estas formas de notación?

$\measuredangle DAB$ $\measuredangle A$ Ánguloα.

¿Te explicas por qué en la primera forma la letra *A* va enmedio? ¿Te parece adecuado el símbolo $\measuredangle$ para abreviar ángulo?

Principios de congruencia y semejanza

Si tuvieras la necesidad de medir el largo de un terreno que está delimitado por segmentos de recta, ¿cómo lo harías? Compara una unidad establecida con la magnitud a medir (largo del terreno). ¿Cuál es la unidad de medida que se utiliza en estos casos? Por supuesto que el metro, por tanto, debes encontrar cuántas veces cabe en el segmento de recta que corresponde al largo del terreno.

Así como utilizaste el metro, que es la unidad del sistema métrico decimal, pudiste emplear otra unidad de medida llamada pie. ¿A qué sistema pertenece éste?, ¿qué otro sistema hay para medir segmentos de recta? Da una definición precisa de lo que entiendes por medir. Si te pidieran que midas AB de la figura 25, ¿utilazarías el metro o una unidad más pequeña como son los centímetros (cm) o milímetros (mm)? ¿Qué entiendes por estos dos últimos conceptos?Coméntalos con tu asesor y da la medida exacta de AB en cada caso.

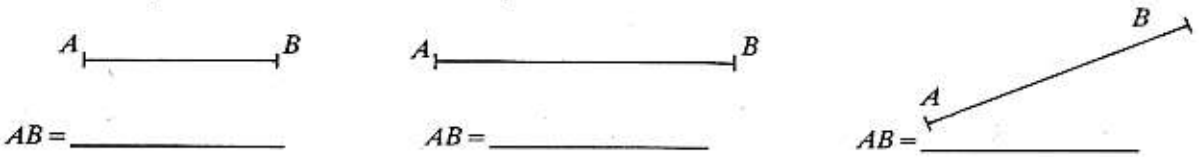


Figura 25.

Observa la figura 26, si alguien te dijera que AB es congruente con CD, ¿qué entenderías?

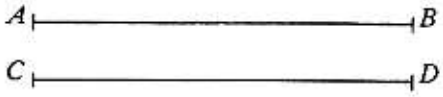


Figura 26.

¿Que $\overline{AB}$ es parecido a $\overline{CD}$? ¿Qué $\overline{AB}$ es exactamente igual a $\overline{CD}$? Cuando se habla de congruencia entre dos segmentos se debe entender que éstos son exactamente iguales. Por ejemplo, si medimos $\overline{AB}$ y observamos que

tiene 10 cm, y por otro lado medimos $\overline{CD}$ y también nos da 10 cm, entonces establecemos que: $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$ y lo denotamos de la siguiente manera:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}.$$

Cuando se trata de segmentos es incorrecto escribir: $\overline{AB} = \overline{CD}$. Aunque el concepto sea el mismo, esto sólo debe señalar su medida, por ejemplo:

$\overline{AB} = 10$ cm
$\overline{CD} = 10$ cm.

Hemos hablado de congruencia, ahora hablemos de semejanza, estos conceptos se relacionan a lo largo del curso, por lo que se hace necesaria su plena identificación.

Se estableció que el concepto de congruencia se da cuando dos figuras geométricas son exactamente iguales (particularmente se manejó congruencia en segmentos de recta), es decir, cuando tienen igual forma y tamaño, pero ¿qué sucede si dos figuras tienen la misma forma, y las medidas de una están a una escala mayor o menor que la otra? Decimos entonces que dichas figuras son semejantes.

Posiblemente no tengas dificultad para establecer el concepto de congruencia, ya que es fácil detectar la igualdad, por ejemplo, los tabiques de una construcción, las hojas de tu cuaderno, todos los objetos fabricados en serie, etc., nos dan una idea de congruencia. En cambio, se requiere de más atención al hablar de semejanza; ya que se puede pensar que dos figuras de diferente tamaño e igual tipo son semejantes, por ejemplo, la figura 27 y la figura 28, ambas son rectángulos de diferentes tamaños, sin embargo, no son semejantes. ¿Qué medidas deberá tener la figura 28 para que exista semejanza?

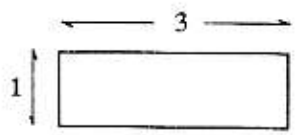


Figura 27.

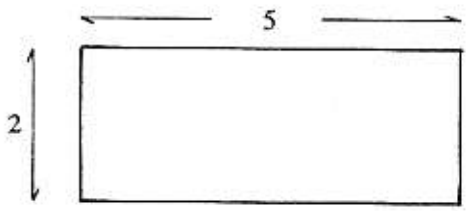


Figura 28.

Se dijo que para manejar la semejanza, además de tener formas iguales, las medidas de una de las figuras debe tener cierta escala en relación con la otra. En el ejemplo de la figura 27 si el ancho es la mitad de la figura 28, entonces, para establecer semejanza, el largo de la figura 27 debe ser también la mitad del largo de la figura 28.

Compara ahora tu juego de escuadras con otro de diferente tamaño. ¿Existe semejanza? Todos los juegos de escuadras son semejantes.

Hablar de medición de segmentos de recta no presenta mayor problema, pues con frecuencia se habla de longitudes aunque sea informalmente, pero hacer mediciones de ángulos puede resultar complejo, pues no estás familiarizado; para entenderlo no pierdas de vista la definición de medir.

Medir es comparar lo que se desea calcular con una unidad establecida. ¿Recuerdas qué unidades existen para medir ángulos?, ¿cómo se generaron dichas unidades y a qué sistema pertenecen?

Al igual que para medir segmentos de recta existen sistemas como el métrico decimal, cuya unidad es el metro (que se divide para obtener los submúltiplos: decímetros, centímetros, milímetros, etc., o se multiplica para obtener múltiplos: decámetros, hectómetros, kilómetros, etc.); o el inglés, cuya unidad es el pie, para medir ángulos contamos con el sistema sexagesimal, el sistema centecimal y el sistema circular. Veamos a qué nos referimos con cada uno.

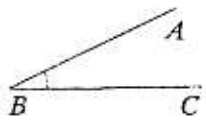
Sistema sexagesimal

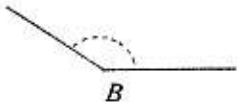
Como recordarás, para generar los diferentes ángulos se giró una semirrecta manteniendo fijo su origen de manera que con la semirrecta móvil describimos un giro, es decir, la máxima abertura o ángulo se obtuvo cuando se regresó a la posición inicial de la semirrecta, entonces lo más lógico es tomar como referencia la figura 22 para obtener unidades de medición.

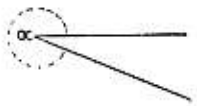
¿De qué manera? Dividiendo el giro en 360 partes iguales, cada una la llamamos *grado* y la designamos con V, de tal manera que una vuelta completa tenga 360 grados (360°); cada grado se divide en 360 partes iguales a las que llamamos minutos, designándolos con (’), es decir, un grado consta de 60 minutos (60’); cada minuto lo dividimos, a su vez, en 60 partes iguales llamadas segundo, denominadas con (”). De esta forma, un minuto tendrá 60 segundos (60”). ¿Cuántos minutos tiene un giro completo? ¿Cuántos segundos?

Si te dijeran que una vuelta completa consta de 360^{o}, ¿estarías de acuerdo? Observa tu transportador, ¿entiendes ahora por qué esa graduación?

Con la ayuda del transportador, trata de encontrar las medidas de los ángulos de la figura 29, proporciona valores aproximados entre grado y grado, ya que en tu transportador no hay subdivisiones correspondientes a minutos y segundos.







$\measuredangle ABC =$ _____ $\measuredangle B =$ _____ $\propto =$ _____

Figura 29.

En ocasiones es necesario encontrar la equivalencia de décimas de grado en minutos y segundos, investiga la forma de hacerlo y da la equivalencia del ángulo siguiente.

$A = 42.743^{o} =$ _____ ^{o} _____ $'$ _____ $''$

Sistema centesimal

En este fascículo no utilizaremos este sistema de medición de ángulos; sin embargo, es conveniente mencionar sus fundamentos para posibles necesidades.

Este sistema en vez de dividir la vuelta completa en 360 partes, optó por dividirla en 400, de tal forma que un giro completo consta de 400 grados centecimales designados como 400^{g}; cada grado es dividido a su vez en 100 partes iguales llamadas minutos centecimales que se designan como 100^{m}; cada minuto consta de 100 segundos centecimales y los designamos 100^{s}, es decir, una vuelta completa tiene 400^{g} o $399^{g}\ 99^{m}\ 99^{s}$.

Sistema circular

Este sistema presenta cierta diferencia con respecto de los otros dos, pues la forma de obtener la unidad de medida difiere de las anteriores. La base del cálculo es el radio de la circunferencia, dado que la abertura formada por dos radios, que subtienden un arco de la circunferencia de longitud igual a un *radio,* se llama *radián*. Siendo el radián la unidad de medida de este sistema (figura 30).

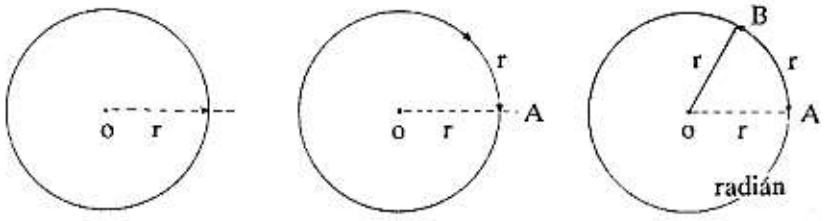


Figura 30.

Si un radián está determinado por un arco de longitud igual a un radio, ¿de cuántos radianes consta una circunferencia completa? Si la longitud de una circunferencia cualquiera es igual a 2π radios, es lógico pensar que caben 2π radianes en la misma.

Conversión del sistema circular al sistema sexagecimal

Utilizando las fórmulas que ya conoces desde la primaria deduzcamos una relación que nos permita transformar los grados en radianes y viceversa.

Sabemos que:

$$C = 2\pi r,$$

por lo tanto,

$$360 \text{ grados} = 2\pi \text{ radianes},$$

donde:

$$\frac{\text{Grados}}{360} = \frac{\text{Radianes}}{2\pi}.$$

Si denominamos a grados con una S y a radianes con una R tenemos:

$$\frac{S}{360} = \frac{R}{2\pi},$$

que equivale a

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}.$$

Apliquemos la relación en los siguientes ejercicios (para simplificar las operaciones toma el valor de π como 3.14):

¿Cuántos radianes mide un ángulo de $114^{\circ}\,39'$?

Para resolverlo se debe considerar que S es la medida del ángulo en grados; por tanto, lo primero es transformar los 39' , a grados (se puede hacer con una regla de tres).

Sabemos que $1^{\circ} = 60'$,

por tanto:

$$\frac{1^{\circ}}{60'} = \frac{x}{39'},$$

donde:

$$x = \left(\frac{1^{\circ}}{60'}\right) 39'$$

$$x = 0.65^{\circ};$$

entonces:

$$114^{\circ}\,39' = 114.65^{\circ}.$$

Este valor es el que sustituimos en nuestra fórmula:

$$\frac{114.65^\circ}{180} = \frac{R}{\pi}.$$

Siendo R la medida del ángulo en radianes,

$$R = (\frac{114.65^\circ}{180})\, 3.14$$

$$R = 2.000005 \text{ radianes.}$$

¿cuántos grados equivale un ángulo que mide 5 radianes?

(10)

$$\frac{S}{180} = \frac{5 \text{ radianes}}{\pi}.$$

despejando:

$$S = (\frac{5 \text{ radianes}}{3.14})\, 180,$$

entonces

$$S = 286.62^\circ.$$

Si queremos encontrar la equivalencia 0.62° en minutos y segundos, hacemos lo siguiente,

$$1^\circ = 60',$$

por tanto:

$$\frac{60'}{1^\circ} = \frac{x}{0.62^\circ},$$

donde:

$$x = (\frac{60'}{1^\circ})\, 0.62^\circ;$$

entonces:

$$x = 372'.$$

Para transformar 0.2' a segundos tenemos que:

$$1' = 60'',$$

por lo tanto

$$\frac{60''}{1}, = \frac{x}{0.2},$$

donde:

$$x = (\frac{60''}{1'})\, 0.2'$$

$$x = 12.0''.$$

así que:

$$S = 286.62^\circ = 286^\circ\, 37'\, 12''.$$

¿Cuántos grados, minutos y segundos mide un radián aproximadamente?

No siempre vamos a manejar ángulos aislados, una de las formas comunes de encontrarlos es en pares; el primero que consideraremos serán los ángulos adyacentes. Observa la figura 31 determina por qué se les llama adyacentes. Estos ángulos tienen un lado en común, vuelve a observar la figura 31 e indica qué semirrecta representa dicho lado.

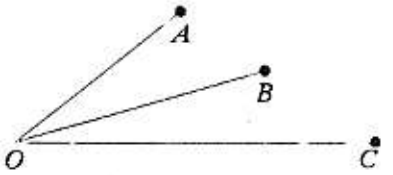


Figura 31.

Dentro de este tipo de ángulos existen dos casos especiales. Observa las figuras 32 y 33, ahora establece por qué a los primeros les llamamos ángulos adyacentes complementarios y cuáles son las características que tienen los segundos para llamarlos adyacentes suplementarios.

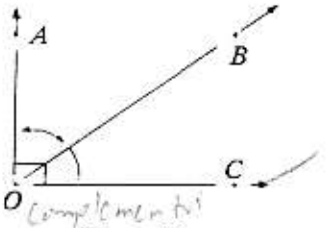


Figura 32.

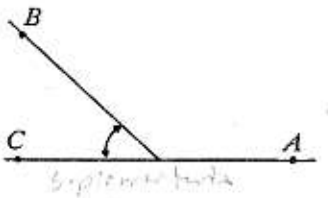


Figura 33.

¿Cuánto suman los ángulos?

$\measuredangle BOC + \measuredangle AOB$?_____

$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC$?_____

Otro par de ángulos es el generado por dos rectas que se cortan, en este caso se generan dos pares de ángulos (véase la figura 34).

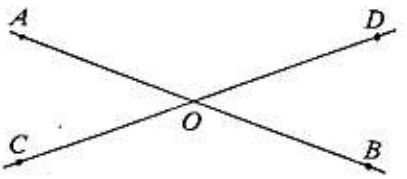


Figura 34.

¿Por qué decimos que formamos dos pares de ángulos y no decimos que formamos cuatro ángulos? Si observas con cuidado podrás ver que el $\measuredangle AOC$ y el $\measuredangle DOB$ son congruentes y que el $\measuredangle AOD$ y el $\measuredangle COB$, también lo son. Para establecer el siguiente concepto realiza una actividad sencilla, que te ayudará a comprender mejor lo que veremos.

En una hoja de papel albanene tamaño carta traza dos rectas paralelas y córtalas con un recta no perpendicular a ellas como en la figura 35, toma como referencia las medidas dadas. La inclinación de la transversal puede ser cualquiera.

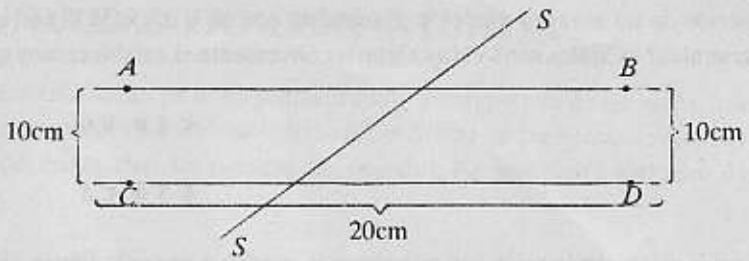


Figura 35.

La figura 35 se conoce como "ángulos generados por dos paralelas cortadas por una transversal llamada sacante".

Obtenida la figura numera los ángulos formados. ¿Cuántos encontraste? ¿Coinciden tus datos con los de la figura 36?

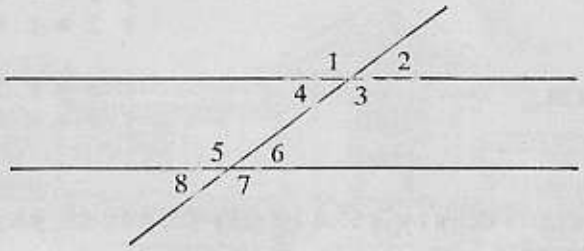


Figura 36.

Escribe todos los pares de ángulos suplementarios. Anota los pares de ángulos opuestos por el vértice. Ahora corta la figura a la mitad sobre la transversal como se muestra en la figura 37.

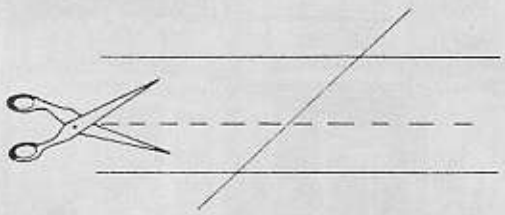


Figura 37.

¿Qué sucede si sobrepones la mitad de la figura sobre la otra mitad, de tal manera que las cuatro líneas coincidan? Observa que el ∢ 1 coincide con el ∢ 5. ¿Qué otros ángulos coinciden? ¿Son exactamente iguales todos los ángulos que coinciden? ¿Estás de acuerdo en establecer lo siguiente?

∢1 ≅ ∢ 5 ∢4 ≅ ∢8

∢2 ≅ ∢ 6 ∢3 ≅ ∢7

Si giras la mitad superior de tal manera que el ∢ 1 coincida con el ∢ 1 y el ∢ 8 con el ∢ 2, ¿qué observas? ¿Hay más ángulos congruentes? ¿Cuáles son? ¿Hay algún inconveniente si establecemos que?

∢ 1 ≅ ∢ 1

∢ 2 ≅ ∢ 8

∢ 4 ≅ ∢ 6

∢ 3 ≅ ∢ 5

Si corroboraste que estos pares de ángulos son congruentes, vuelve a pegar la figura 35 para que quede como originalmente se estableció. Ahora nombra los pares de ángulos (figura 38).

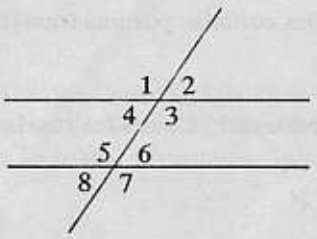


Figura 38.

∢ 1 ≅ ∢ 5
∢ 2 ≅ ∢ 6
∢ 3 ≅ ∢ 7
∢ 4 ≅ ∢ 8
} Ángulos correspondientes

∢ 1 ≅ ∢ 7
∢ 2 ≅ ∢ 8
} Ángulos alternos externos

∢ 3 ≅ ∢ 5
∢ 4 ≅ ∢ 6
} Ángulos alternos internos

¿Qué podemos establecer a partir del ∢1 y ∢6? A los ∢2 y ∢5, ∢4 y ∢7, ∢8 y ∢3, se les llama ángulos conjugados. ¿Cuál es su característica?

POLÍGONOS: UNA CLASIFICACIÓN INTUITIVA

Los conceptos de la geometría, como ya se ha señalado, son consecuencia de las actividades de nuestra vida diaria. Por ejemplo, en tu casa puedes identificar figuras geométricas en las ventanas que tienen forma rectangular o cuadrada, algunas veces triangular; las puertas, las paredes, los muebles e inclusive este fascículo tiene una forma geométrica.

Es posible que la misma naturaleza haya proporcionado al ser humano las primeras nociones de la geometría. Existen muchos ejemplos de formas geométricas en el mundo físico. Con el paso del tiempo, el hombre empezó a clasificarlas, les dio un nombre y creó definiciones para describirlas.



Figura 39.

Dichas figuras formadas por segmentos de rectas son muy comunes en nuestro ambiente y reciben el nombre de polígonos. ¿Cómo definirías a un polígono?

En el lugar donde te encuentras localiza objetos que no son parte de la naturaleza. Da ejemplos de figuras geométricas de las construcciones arquitectónicas, del diseño industrial, del deporte, y de la comunidad en donde habitas. Recorta fotografías o dibujos y pégalos en el siguiente espacio.



Primera litografía de Escher: Goriano Sicoli, los Abruzos, 1929. (Tomado de Bruno, Ernest: *El espejo mágico de M. C. Escher*, p. 69.)

Figura 40.

Observa las formas de la figura 41. Reflexiona y contesta las cuestiones siguientes: ¿Cuál es la forma que tiene menor número de lados?, ¿cuál es el que tiene mayor número de lados?, ¿como lo clasificarías?, ¿que características semejantes tienen?

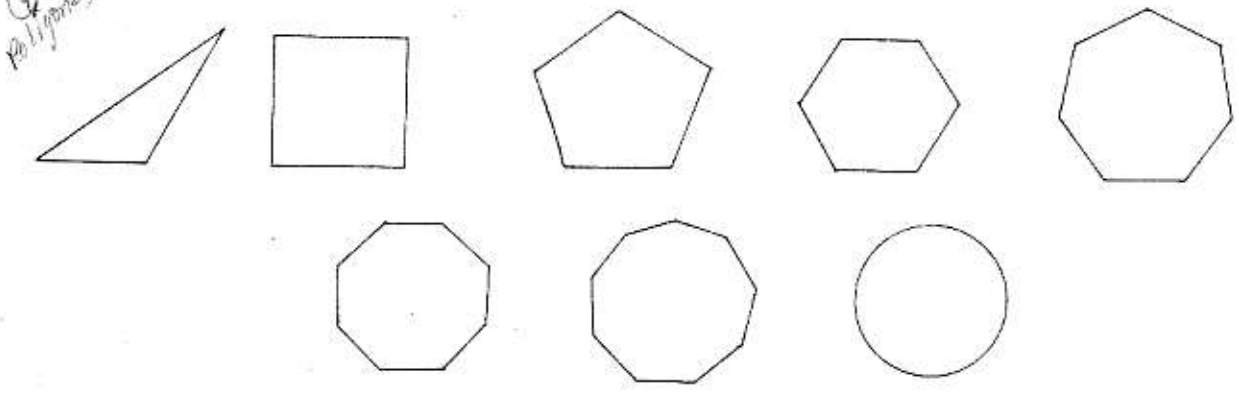
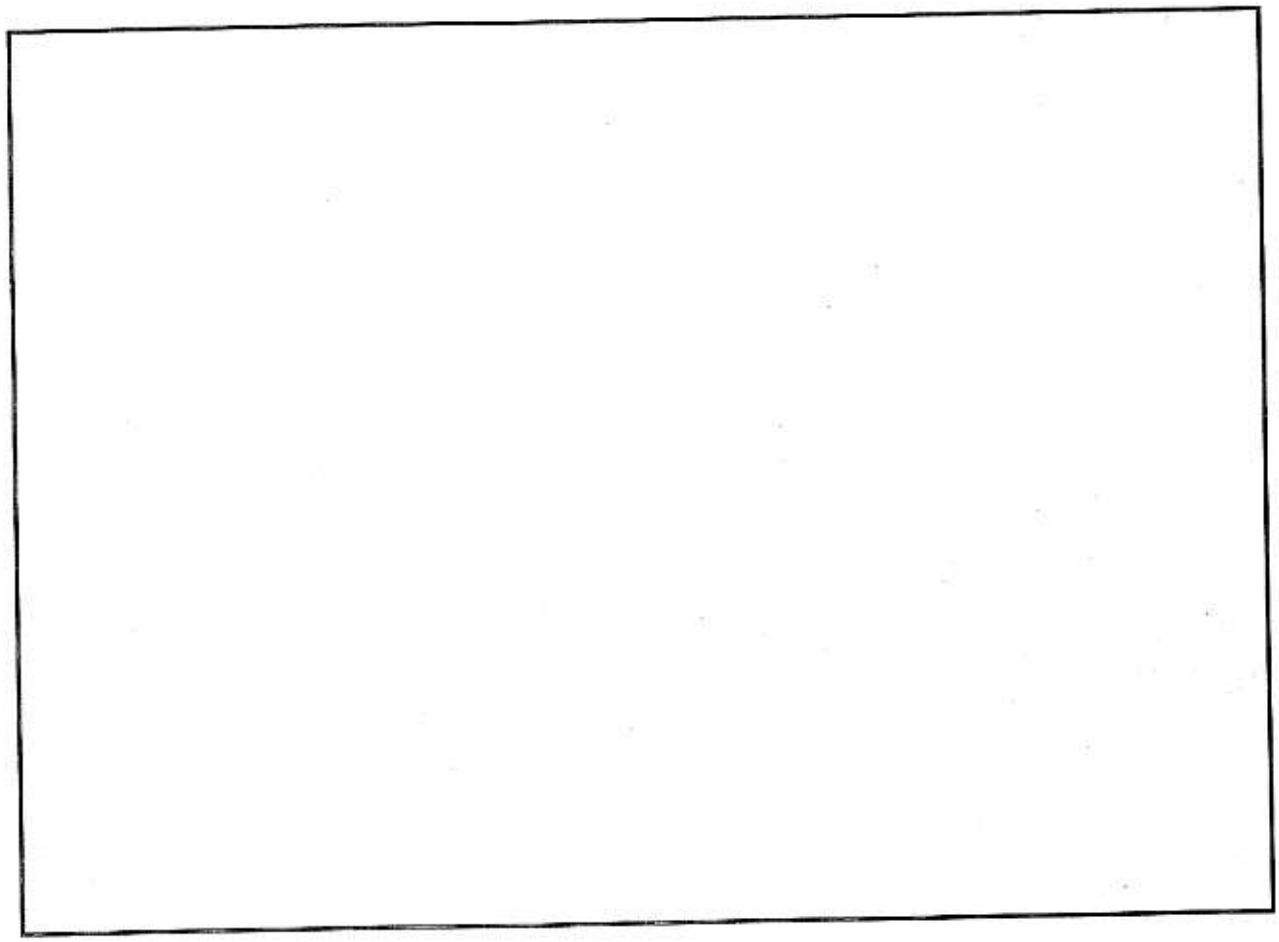


Figura 41.

Con las formas anteriores haz un memorama e invita a alguien para jugar. Escríbeles su nombre particular. Inventa tus propios juegos tomando como base las formas geométricas de la figura 41.



Se da el nombre de polígono a toda figura plana, cerrada, limitada por líneas rectas. Los puntos en donde se cortan o unen las rectas que forman el polígono se llaman vértices y a las líneas, lados del polígono. La suma de las longitudes de los lados de un polígono se llama perímetro. Un polígono puede se cóncavo, y tiene la particularidad de que al prolongarse alguno de sus lados la figura queda dividida. También puede ser convexo, si toda la figura queda situada siempre del mismo lado cuando se prolonga. La diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

Los polígonos reciben nombres distintos; cuando tienen tres lados se denominan triángulos, es de los polígonos el de menor número de lados; si tiene cuatro lados, se llama cuadrilátero; de cinco lados, pentágono; con seis lados hexágono; ocho lados, octágono; de diez lados, decágono; doce lados dodecágono; quince lados, pentadecágono, etcétera.

Los polígonos pueden ser regulares, al tener todos sus lados iguales, lo mismo que sus ángulos; son irregulares aquellos que tienen sus ángulos y la longitud de sus lados desiguales.

En la figura 40, identifica algunos polígonos, marca con azul los triángulos, con verde los cuadriláteros, con amarillo los pentágonos, y con rojo aquellos que tengan más de seis lados.

Observa la figura 42 y contesta lo que a continuación se te pide. ¿Cuántos vértices? y ¿cuántos lados tiene cada forma?, ¿cuántos lados tendrá un polígono con n número de vértices?. ¿A qué conclusión llegaste?

vértices 3 vértices 4 vértices 5 vértices 6

lados 3 lados 4 lados 5 lados 6



Figura 42.

Traza tres rectas en el interior del cuadro de la figura 43, de manera que lo dividas en seis triángulos y nueve trapecios.

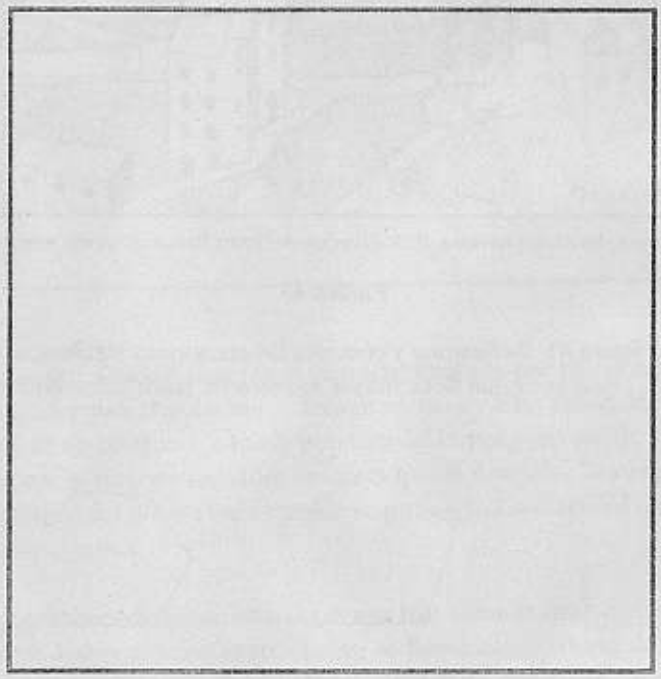


Figura 43.

Traza tres rectas en el interior del cuadro de la figura 44 de manera que lo dividas en cuatro triángulos rectángulos iguales.

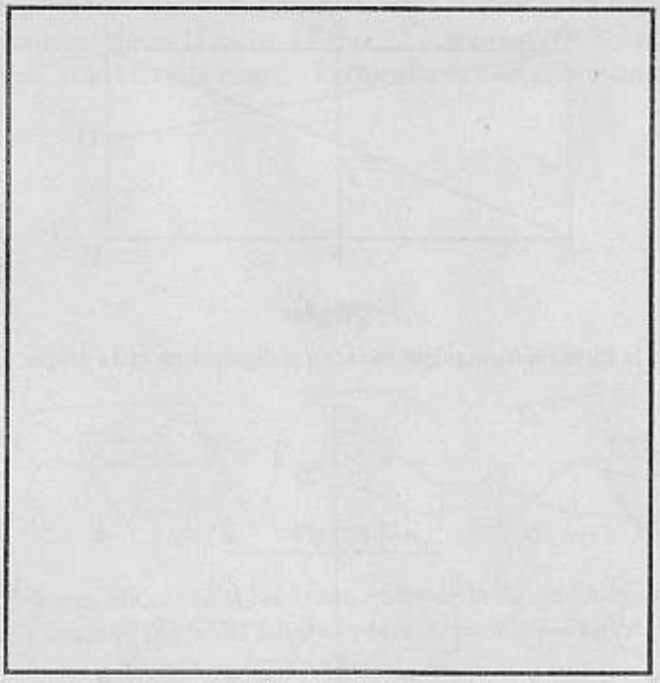


Figura 44.

Algunas letras del alfabeto pueden dibujarse en forma de polígonos, pero otras no. Dibuja con forma de polígono tantas letras como sea posible, fíjate en la figura 45.

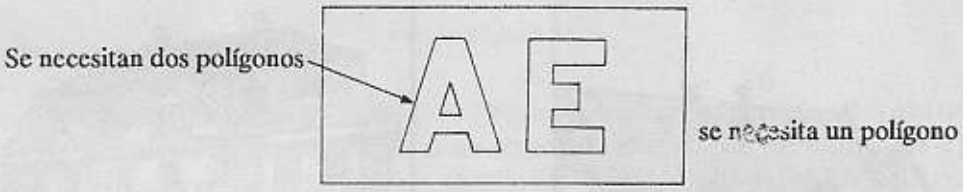


Figura 45.

Observa el vástago de la válvula de una toma de agua para incendios, tiene forma de pentágono regular en lugar de la forma usual de hexágono regular. ¿A qué se debe? (figura 46.)

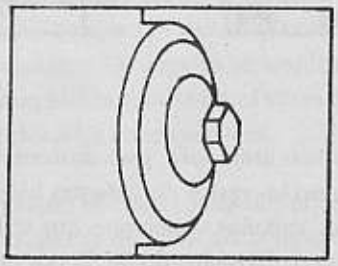


Figura 46.

La figura 47 contiene ejemplos diferentes de polígonos, desde triángulos hasta decágonos. Encuentra y menciona cada uno.

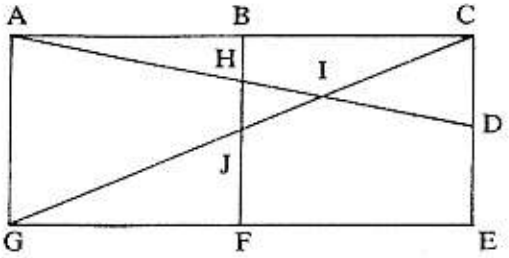


Figura 47.

De la figura 48 selecciona la forma o formas que no sean polígonos en cada grupo.

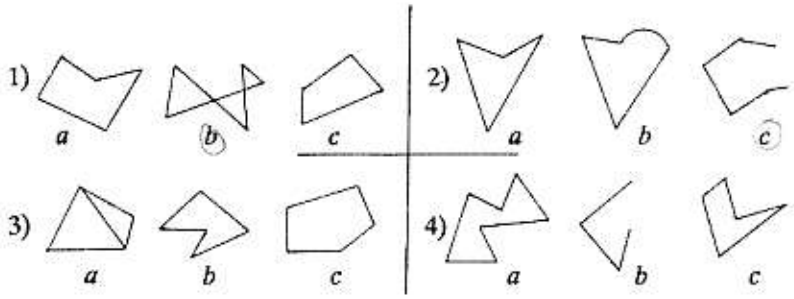


Figura 48.

TRIÁNGULOS



Figura 49.

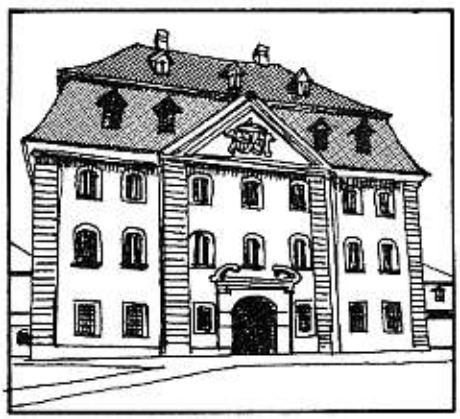


Figura 50.

El triángulo aparece por vez primera como armadura, para sostener los techos de dos aguas de una habitación de bases rectangulares. Lo atestiguan, no los restos de antiguas habitaciones que siendo de madera, han sido destruidas, sino diseños rudimentarios de cabañas semejantes que se han encontrado en particular en el valle del Danubio y que datan del periodo neolítico. El triángulo nació por necesidades técnicas, y su estructura rígida fue utilizada en las construcciones desde la antigüedad.

Imagina que tienes a tu disposición varias tiras de diferentes longitudes, éstas no se precisan. ¿Cuándo es posible construir un triángulo y cuándo no?

Recorta en una hoja de papel tres triángulos diferentes, como se muestra en la figura 51. Trata de recortarlos de manera que se puedan colocar juntos, fíjate en la figura 52. ¿Qué observas al sumar los ángulos? ¿Se cumplirá lo mismo en los triángulos? ¿Cuál sería la suma de los ángulos de cualquier triángulo?

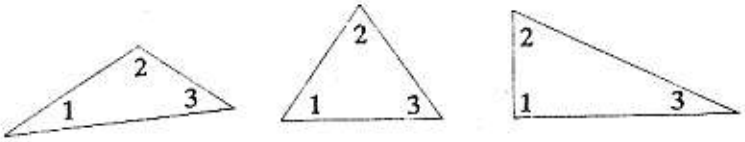


Figura 51.

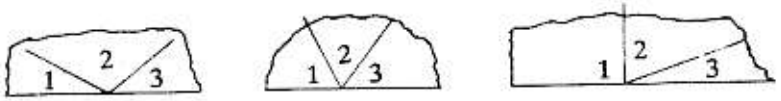


Figura 52.

Si en tres triángulos diferentes mides todos sus lados, como en la figura 53, la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado. ¿Se cumple para todos los triángulos?

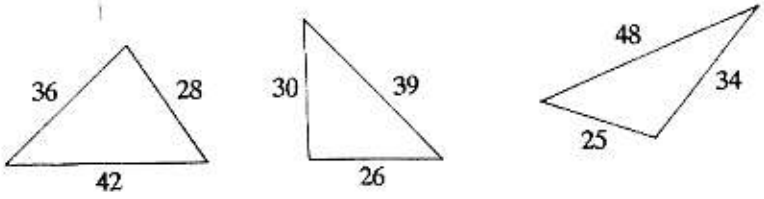
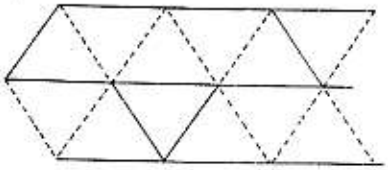


Figura 53.

Como te habrás dado cuenta, un triángulo es el polígono con menor número de lados que se puede construir, pues tiene tres lados y tres ángulos. Se clasifican de acuerdo con la relación entre sus lados o por la medida de sus ángulos. Por sus lados puede ser; equilátero, cuando sus tres lados son iguales; isósceles, cuando dos de ellos son iguales; escaleno, si los tres son desiguales. Atendiendo a sus ángulos, el triángulo se denomina: rectángulo, cuando tiene un ángulo recto, dándosele el nombre de *hipotenusa* al lado opuesto a este ángulo y a los otros lados *catetos*; acutángulo, al que tiene sus tres ángulos agudos; obtusángulo, al que tiene un ángulo obtuso.

En los triángulos se utilizan letras mayúsculas para los vértices, y minúsculas para los lados. Es costumbre emplear las tres primeras letras del alfabeto en orden sucesivo, colocando la letra A en el ángulo recto del triángulo rectángulo. Cuando es necesario designar los ángulos se emplean las letras del alfabeto griego, no obstante, se denomina a un ángulo por la letra mayúscula escrita en el vértice que le corresponde. Las letras mayúsculas se ponen en los lados opuestos de las colocadas en los vértices.

Un *hexadiamante* es un polígono formado por seis triángulos equiláteros. Dibuja y corta en un trozo de cartulina seis copias del triángulo equilátero que se muestra en la figura 54. Varía la posición de los seis triángulos hasta descubrir doce hexadiamantes de formas diferentes. Dibújalos.



hexadiamante

Figura 54.

¿Cuántos triángulos hay en la figura 55?

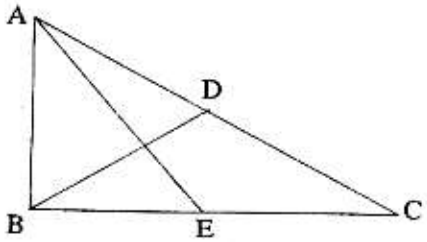


Figura 55.

En la figura 56 se muestran 13 palillos dispuestos para formar seis triángulos, quita tres palillos para que queden tres triángulos

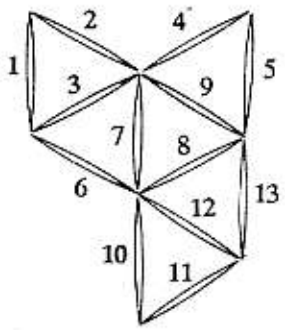


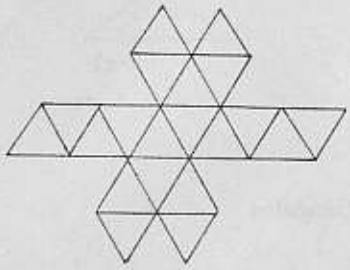
Figura 56.

DOMOS GEODÉSICOS

¿Alguna vez has oído hablar de la Carpa Geodésica? ¿Sabes a qué se debe su nombre?, ¿qué semejanza tiene con el Palacio de los Deportes?, ¿conoces otros edificios parecidos?

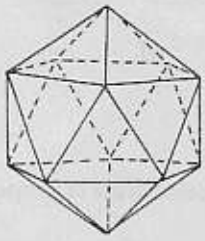
Los domos geodésicos fueron creados por R. Buckminster Fuller, los planos de una clase de domo llamado solar pueden encontrarse en la publicación de la revista popular *Science* de mayo de 1966. Se han construido domos de diferentes formas, tamaños y diversos materiales. Dichas estructuras se pueden utilizar para invernaderos, cubiertas de piscinas y también en viviendas. Éstos se hacen lo más parecido posible a porciones de esferas. Existen dos razones fundamentales para utilizarlos; primera, la esfera encierra el mayor volumen con la menor superficie; segundo, es la figura más resistente.

Con cartulina o con palillos, hilo y, un patrón de 20 triángulos equiláteros elabora un modelo de icosaedro. Observa las figuras 57 y 58.



Patrón para un icosaedro

Figura 57.



Icosaedro

Figura 58.

TRIÁNGULOS CONGRUENTES

Dibuja en papel dos triángulos como los que se muestran en la figura 59 y recórtalos. Si pones uno encima del otro, ¿qué observas? ¿coinciden en todos sus vértices?, ¿qué sucede con los lados? Si marcas cada lado con un signo especial podrás observar que:

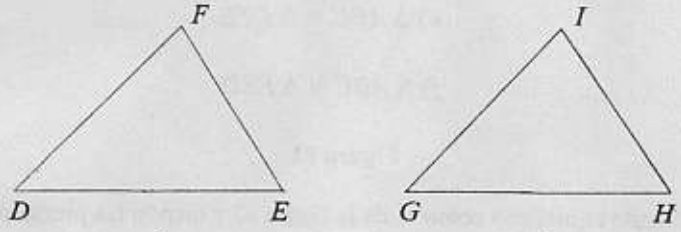


Figura 59.

$\overline{DF} \cong \overline{GI}$ $\quad \measuredangle D \cong \measuredangle G$

$\overline{DE} \cong \overline{GH}$ $\quad \measuredangle E \cong \measuredangle H$

$\overline{EF} \cong \overline{HI}$ $\quad \measuredangle F \cong \measuredangle I$

Siempre que puedas hacer coincidir un triángulo con otro de manera que las partes comparadas sean iguales se le da el nombre de congruencia y para poderlo indicar se escribe:

$\Delta EDF \cong \Delta GHI$

¿De los triángulos de la figura 60 cuáles son congruentes?

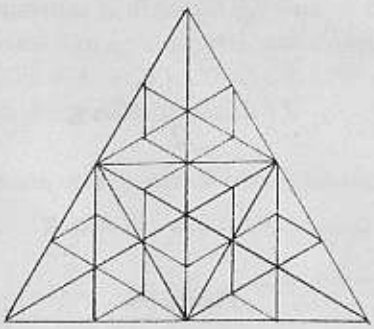


Figura 63.

Dibuja tres copias de la estrella más pequeña de la figura 64, córtala por la líneas punteada y coloca las piezas para formar la estrella grande.

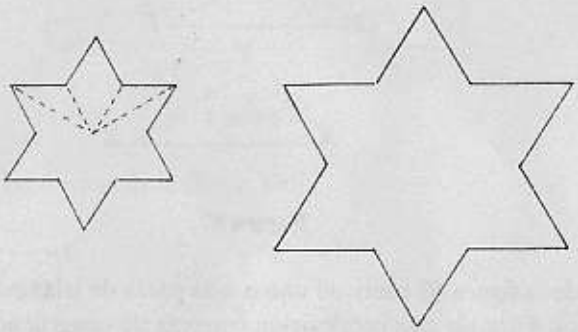


Figura 64.

POSTULADOS DE CONGRUENCIA

Los postulados de la congruencia de los triángulos son:

1. Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes (figura 65).

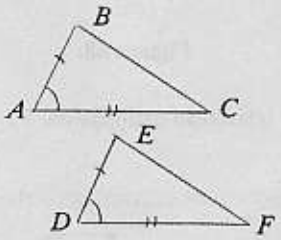


Figura 65.

2. Si dos ángulos y el lado común de un triángulo son respectivamente congruentes con dos ángulos y el lado común de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes (figura 66).

Un equipo de agrimensores desea encontrar la distancia AB a través de un lago. Un método requiere la construcción de un par de triángulos congruentes. Los agrimensores seleccionan un punto cualquiera C, miden $\measuredangle ACB$ y ubican un punto D de manera que $\measuredangle ACD \cong \measuredangle ACB$ y $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. ¿Por qué son congruentes $\measuredangle ACD$ y $\measuredangle ACB$? ¿Cómo puede esto ayudar a encontrar la distancia requerida?

En el rompecabezas de la figura 70 encuentra un par de triángulos equiláteros congruentes.

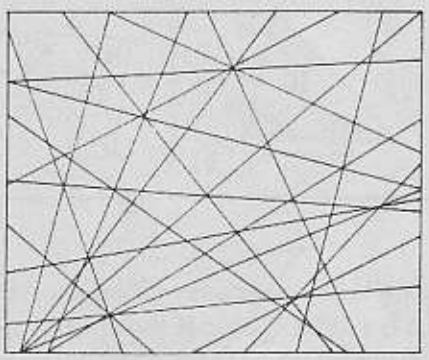


Figura 70.

Determina el valor de x y y de las formas de la figura 71.

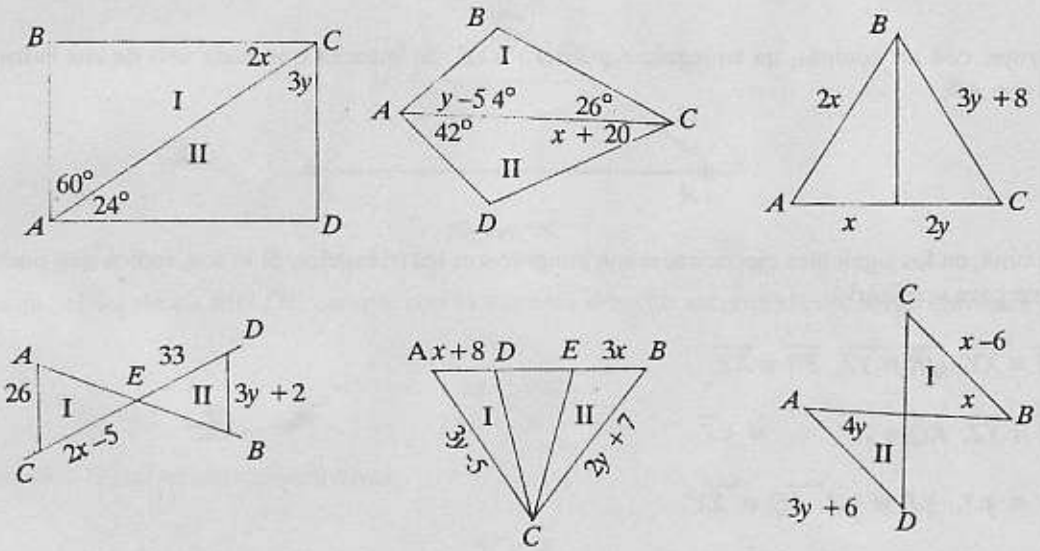


Figura 71.

En los casos de la figura 72 encuentra los triángulos que sean congruentes y establece el criterio de congruencia respectivo.

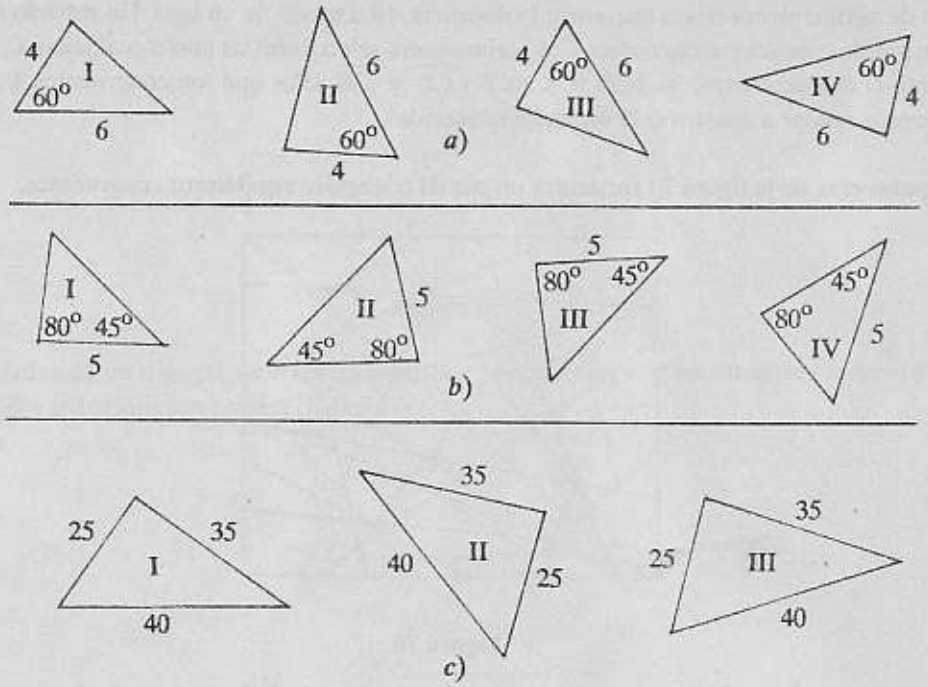


Figura 72.

Construye, con un compás, un triángulo equilátero *XYZ*, de manera que cada uno de sus lados sean congruentes con *AB*.



Determina, en los siguientes ejercicios, si son congruentes los triángulos. Si lo son, indica qué postulado puedes utilizar para verificarlo.

a) $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$, $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$, $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$

b) $\overline{PR} \cong \overline{XZ}$, $\overline{RQ} \cong \overline{ZY}$, $\cong \measuredangle Z$

c) $\measuredangle P \cong \measuredangle X$, $\measuredangle R \cong \measuredangle Z$, $\overline{PQ} \cong \overline{XY}$

d) $\measuredangle Q \cong Y$, $\measuredangle R \cong \measuredangle$, $\overline{QR} \cong \overline{YZ}$

e) $\measuredangle P \cong X$, $\measuredangle Q \cong \measuredangle$ *]ZRCá {< back 67) }*$R \cong \measuredangle Z$

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Si comparas un par de triángulos, por ejemplo, ΔABC *Y* ΔDEF, podrás observar que son semejantes, pero en la *geometría euclidiana* existe una forma precisa para comprobar si tienen exactamente la misma forma (véase figura 73). Supón que el vértice *A* del ΔABC es el que corresponde al vértice *F* del ΔEDF, dado que los ángulos correspondientes $\measuredangle A$ y $\measuredangle F$, parecen tener igual medida. Entonces, como $\overline{AC}$ pareciera ser el lado más corto

en el Δ *ABC* y $\overline{EF}$ el más corto en el Δ *DEF*, haz ahora que correspondan los vértices *C* y *E* y, *B* y *D*. Podrías visualizar mejor la correspondencia si haces girar imaginariamente Δ *DEF* un cuarto de vuelta en dirección de las manecillas del reloj, de manera que Δ *ABC* y Δ *DEF* queden dispuestos como se muestra en la figura 74.

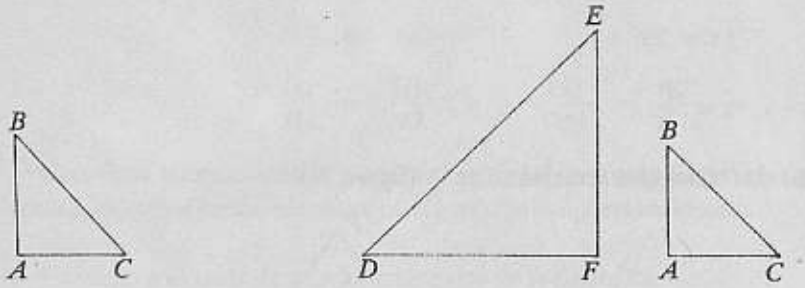


Figura 73.

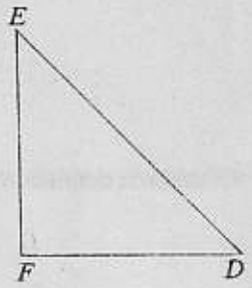


Figura 74.

Si ahora mides con un transportador los ángulos y encuentras que el ∢ *BAC* ≅ ∢ *DFE*, ∢ *ABC* ≅ ∢ *FDE* y ∢ *ACB* ≅ ∢ *FED*, entonces los ángulos correspondientes del Δ *ABC* y el Δ *DEF* son congruentes. ¿Será la longitud del lado del Δ *DEF* aproximadamente 3/2 de la longitud del lado correspondiente del Δ *ABC*? Si al medir compruebas que esto es cierto, entonces escribe tres proporciones para describir esta situación.

Ahora aplica este teorema para resolver el triángulo de la figura 75.

17
18

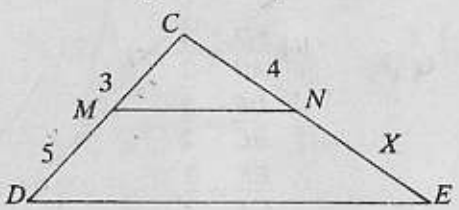


Figura 75.

Observa que el segmento MN DE cumple con el teorema descrito anteriormente, luego entonces tenemos que:

$$\frac{CM}{MD} = \frac{CN}{NE}.$$

¿Qué sucedió? Efectivamente tenemos que:

$$CM = 3$$
$$MD = 5$$
$$CN = 4$$
$$NE = X$$

Entonces:

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{x},$$

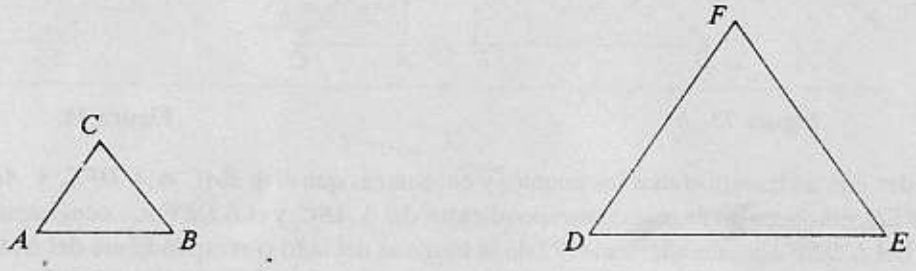
al resolver la proporción resulta que:

$$3x = 5(4)$$

$$3x = 20$$

$$x = \frac{20}{3}.$$

El símbolo empleado para poder señalar dos triángulos semejantes es $\sim$ (figura 76):



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Figura 76.

$$\frac{FD}{AB} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{DE}{BC} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{EF}{CA} = \frac{3}{2}.$$

Al combinarlas queda de la siguiente manera,

$$\frac{FD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{EF}{CA} = \frac{3}{2}.$$

¿Qué conclusión sacas de las anteriores afirmaciones?

Ahora formula un método preciso para la comprobación de la semejanza de triángulos. Quedaría así: "Dos triángulos son congruentes si, para alguna comparación de sus vértices, los ángulos correspondientes son congruentes y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales".

En los triángulos de la figura 77, se trazó un segmento paralelo a un lado del triángulo.

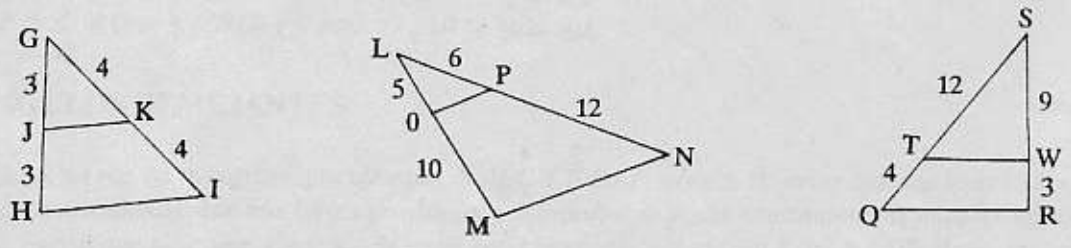


Figura 77.

Dado un mapa a escala de las ubicaciones A, B, y C, entonces ABC A' B' C', luego si tenemos que $A'C' = 36$ mm, $A'B' = 24$ mm y $AB = 32$ mm. Cuál es el valor de AC.

Un método para encontrar la altura de un objeto es colocar un espejo en el suelo y después situarse de manera que la parte más alta del objeto pueda verse en él. Si una persona de 150 cm de estatura observa la parte superior de una torre a través de un espejo cuando éste está a 120 m de la torre y la persona a 6 m del espejo, ¿qué altura tiene la torre?

Cuando tomas una fotografía, la imagen que se forma en la película es semejante al objeto que fotografiaste. Los triángulos semejantes nos ayudan a explicar esto. Si AB y $A'B'$ son paralelas, prueba que LAB y $L'A'B'$ son semejantes, véase la figura 79.

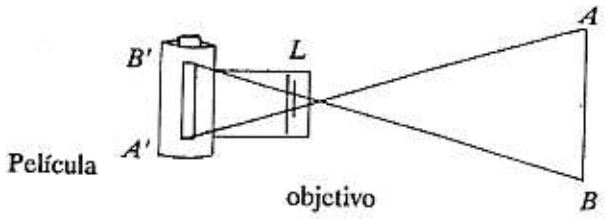


Figura 79.

¿Son semejantes todos los triángulos rectángulos? ¿Por qué? ¿Son semejantes dos triángulos isósceles que tienen sus vértices congruentes? ¿Por qué?

Si una persona mide 6 pies de altura y proyecta una sombra de 9 pies, ¿qué sombra proyectará un poste de 20 pies?

Supón que colocas un proyector de transparencias a 20 pies de la pantalla, supon que ABC es semejante a $A'B'C'$.

a) Si se corta un triángulo ABC y se coloca a x pies frente al proyector, calcula la longitud $A'B'$ en función de la longitud AB y de la distancia x.

b) Si x se reduce a la mitad, ¿qué pasa con $A'B'$?

TEOREMA DE PITÁGORAS

Imagina que te encuentras en tu habitación construyendo un avión de juguete. Al pegar las alas al fuselaje del aeroplano te das cuenta que éste no pasará por la puerta, debido a que las alas miden $3\frac{1}{2}$ metros de una punta a la otra, y tu puerta mide 3 metros de altura y 2 de ancho.

Una de las formas sería que inclinaras el avión por la puerta. ¿Es factible realizarlo de esta manera?

Veamos qué relación existe entre los lados de un triángulo rectángulo. En una hoja de papel cuadriculado traza un triángulo rectángulo de cuatro unidades de anchura (primer cateto), por tres unidades de altura (segundo cateto). Ahora, mide el lado más largo (hipotenusa), éste último lado tendrá cinco unidades de longitud. Veamos otros triángulos rectángulos como los de la figura 80 y mide la hipotenusa de cada uno (lado más largo).

Como puedes observar:

$$\frac{GJ}{JH}=1 \quad \frac{GK}{KI}=1 \qquad \frac{LO}{OM}=1 \quad \frac{LP}{PN}=1 \qquad \frac{ST}{TQ}=1 \quad \frac{SW}{WR}=1$$

o o o

$$\frac{GJ}{JH}=\frac{GK}{KI} \qquad \frac{LO}{OM}=\frac{LP}{PN} \qquad \frac{ST}{TQ}=\frac{SW}{WR}$$

Con estas afirmaciones se plantea el siguiente teorema: Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a otros dos lados, entonces divide a éstos proporcionalmente.

Encuentra el valor de x en los triángulos de la figura 78.

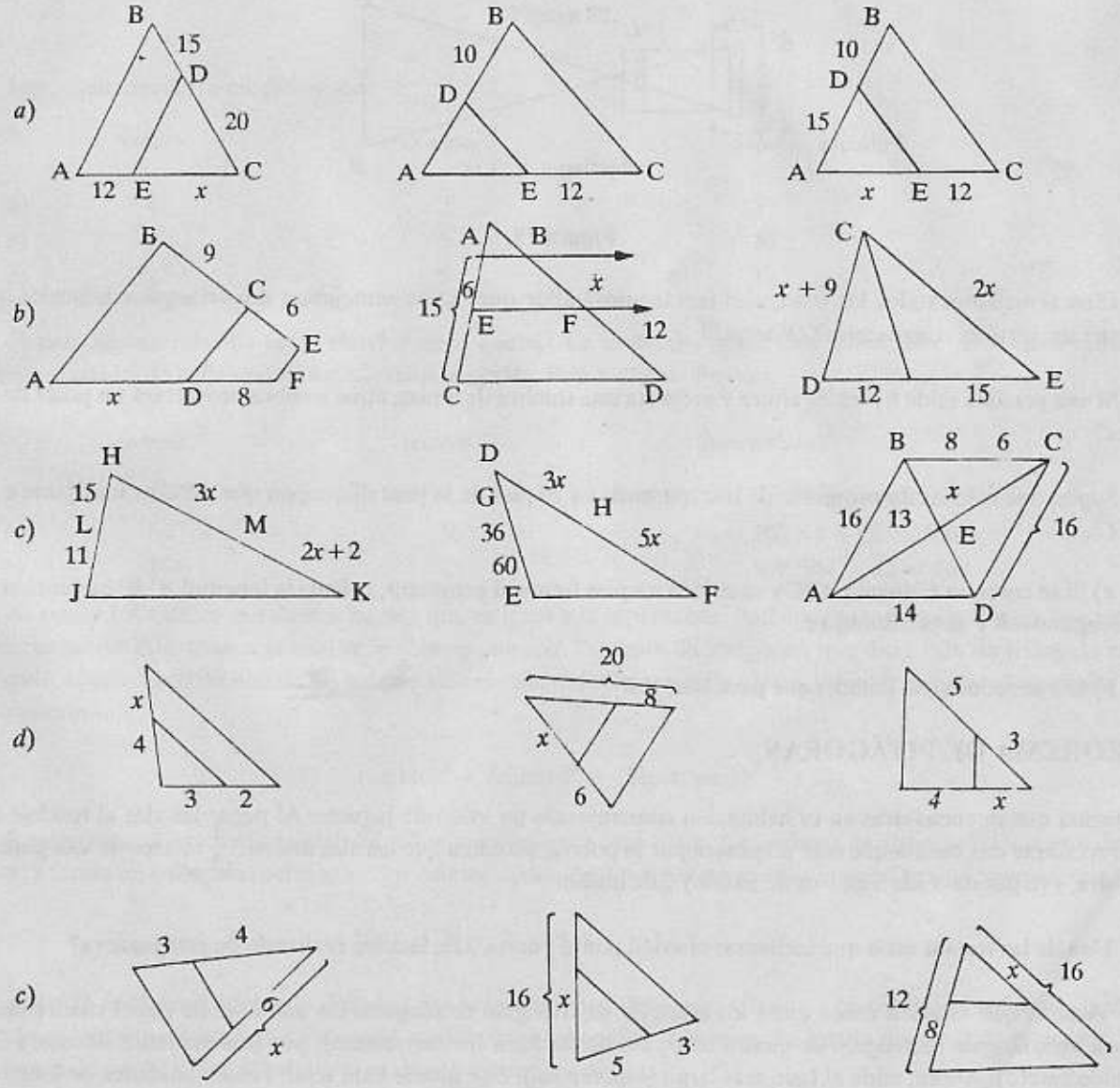


Figura 78.

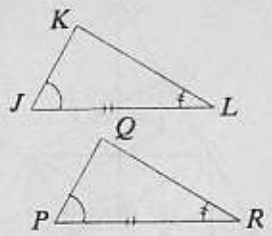


Figura 66.

3. Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes con los otros tres lados del otro triángulo, entonces los dos triángulos son iguales (figura 67).

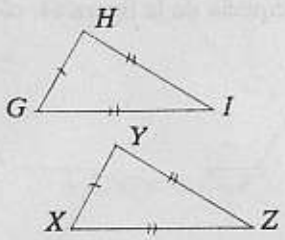


Figura 67.

Cada una de la formas de la figura 68 contiene uno o más pares de triángulos congruentes. En ocasiones estos se traslapan unos a otros. Formula una proposición correcta de congruencia para cada par que encuentres. En la figura 68 ¿cuántos triángulos diferentes hay que sean congruentes con los que tienen nombre de letra?

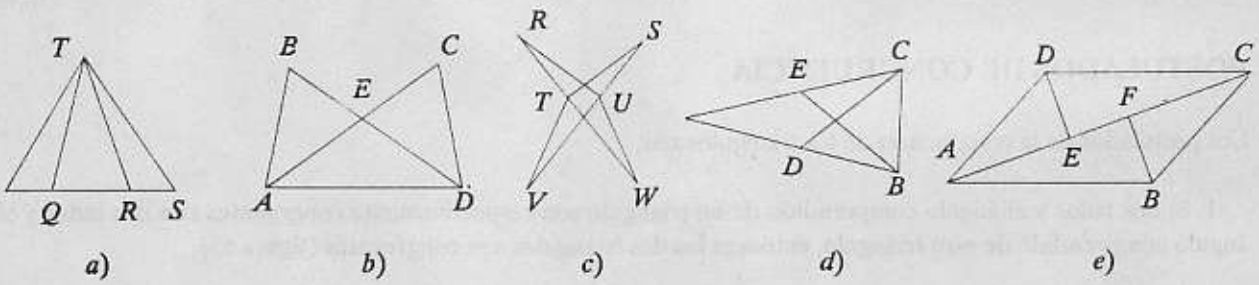


Figura 68.

Si observas en la figura 69 otros tipos de triángulos, dibújalos.

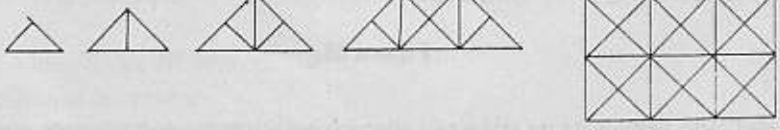


Figura 69.

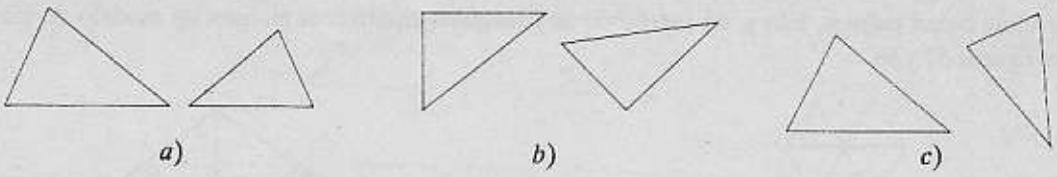
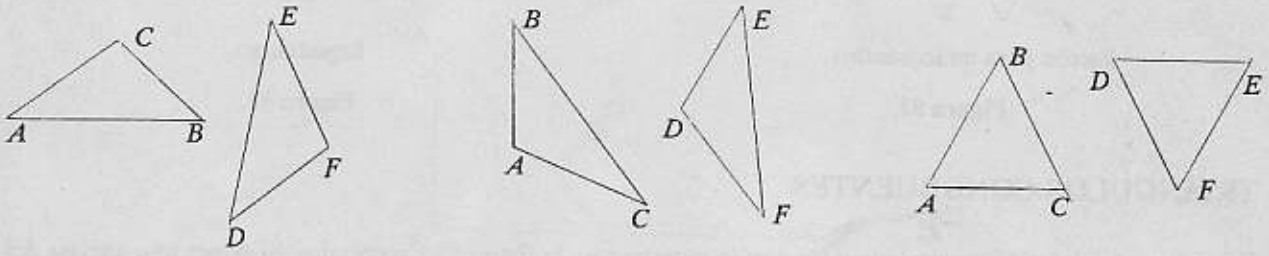


Figura 60.

De la figura 61 selecciona la proposición correcta de los pares de triángulos.



a) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b) $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

c) $\Delta ABC \cong \Delta EFD$

d) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

e) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$

f) $\Delta ABC \cong \Delta FED$

a) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

b) $\Delta ABC \cong \Delta EFD$

c) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$

Figura 61.

Dibuja y recorta un triángulo equilátero como el de la figura 62 y dispón las piezas para luego formar un cuadrado.

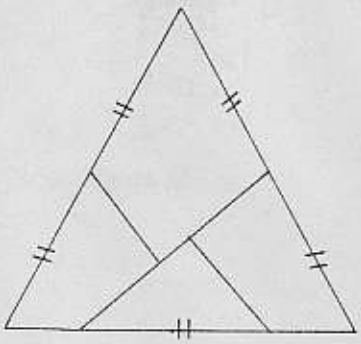


Figura 62.

En una tabla con tres clavos en un lado, o en un papel de puntos de 3×3, se muestra:

1. Segmentos de cinco longitudes diferentes.
2. Ángulos de diez tamaños diferentes.
3. Triángulos de siete tamaños y formas diferentes.

¿Cuántos triángulos equiláteros existen en la figura 63?

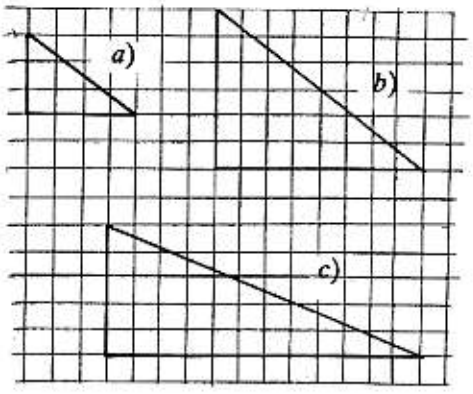


Figura 80.

Los resultados de tu medición son:

	cateto	*cateto*	*hipotenusa*
a)	4	3	5
b)	8	6	10
c)	12	5	13

¿Existe alguna relación entre ellos? Parece que no, sin embargo, existe una relación un poco escondida, si elevas al cuadrado cada uno de los números te queda de la siguiente forma:

	$(cateto)^2$	$(cateto)^2$	$(hipotenusa)^2$
a)	16	9	25 16 + 9 = 25
b)	64	36	100 64 + 36 = 100
c)	144	25	169 144 + 25 = 169

Al sumar los catetos nos damos cuenta que es igual a la hipotenusa. Podemos entonces establecer una regla que descubrió Pitágoras, a la cual se le conoce como el Teorema de Pitágoras, que dice: "En un triángulo rectángulo, el cuadrado de uno de los catetos más el cuadrado del segundo cateto, siempre es igual al cuadrado de la hipotenusa",

$$(\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2 = (\text{hipotenusa})^2.$$

Regresemos al problema inicial del avión y apliquemos esta regla. La anchura, la altura y la diagonal de la puerta forma un triángulo rectángulo. Sus catetos miden 2 y 3 metros, respectivamente. De aquí tenemos que,

$$3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13,$$

como 13 es el cuadrado de la diagonal por la que el avión debe pasar, tendrás que elevar al cuadrado la distancia de punta a punta de las alas, pero necesitamos saber si es más pequeña que la diagonal de la puerta. La distancia de punta a punta de las alas es de $3\frac{1}{2}$ metros, entonces,

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3\frac{1}{2}\right)\left(3\frac{1}{2}\right) = (7/2)\ (7/2) = 49/4 = 12\frac{1}{2}.$$

Como ves este resultado es menor que 13, por lo que podemos afirmar que el aeroplano podrá pasar ladeándolo por la puerta.

En un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b, encuentra la hipotenusa c cuando:

a) $a = 15, b = 20$
b) $a = 15, b = 36$
c) $a = 5, b = 4$
d) $a = 5, b = 5\sqrt{3}$

En un triángulo rectángulo como el de la figura encuentra el desconocido:

a) $a = 12, c = 20$
b) $b = 6, c = 8$
c) $b = 15, c = 17$
d) $a = 5\sqrt{2}, c = 10$

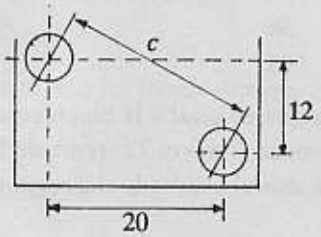
En un cuadrado encuentra:

a) el lado, si la diagonal es de 40 unidades.
b) la diagonal si el lado es de 40 unidades.

En un rombo, que tiene un ángulo de 60°, encuentra:

a) las diagonales si el lado es de 25 unidades.
b) el lado y la diagonal mayor si la menor es de 35 unidades.

En el siguiente dibujo determina el valor de c mediante el teorema de Pitágoras.



La contrapunta de un torno, representada en la figura 81, tiene las dimensiones indicadas. ¿Cuál es la altura a de esta punta cónica?

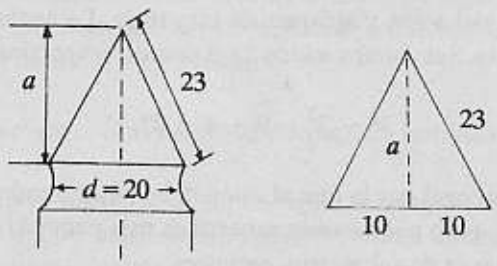


Figura 81.

En un anuncio sobre la venta de un televisor dice que la pantalla es de 25 pulgadas, aunque ésta mide aproximadamente 19.5 pulgadas de ancho y 15.5 pulgadas de altura. ¿Por qué se puede anunciar que tiene una pantalla de 25 pulgadas?

Con cuadrados cuyos lados miden $a + b$, muestra que el teorema de Pitágoras es verdadero.

Una persona viaja 8 millas al norte, 3 millas al oeste, 7 millas al norte y 11 millas al este. ¿A qué distancia está la persona del punto original?

Un grupo de ingenieros agrimensores quiere medir la distancia entre dos puntos A y B en un terreno accidentado, desean saber la distancia horizontal real AB. Si la tierra está 0.75 metros más alta en la mitad de los dos puntos y si la cinta de medir indica 27.0 metros ¿Cuál es la distancia real AB?

Una caja tiene 24 cm de largo, 8 cm de ancho y 10 cm de alto. ¿Cuál es la longitud de la diagonal AB?

Calcular la altura de un poste que tiene un tirante de 27m desde la punta del poste hasta el clavo que se encuentra a 20 m de la base del poste.

Calcula la longitud del cable que se necesita para colocar un tirante desde la punta del poste de 12m de altura, hasta un clavo que se encuentra a 7 m de la base del poste.

Calcular el valor de cada uno de los lados de los triángulos de la figura 82.

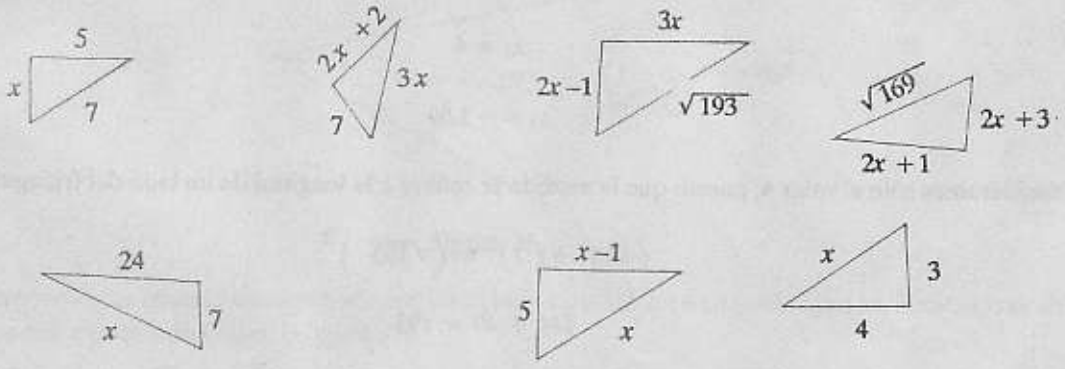


Figura 82.

Trata de resolver el ejercicio de la figura 83.

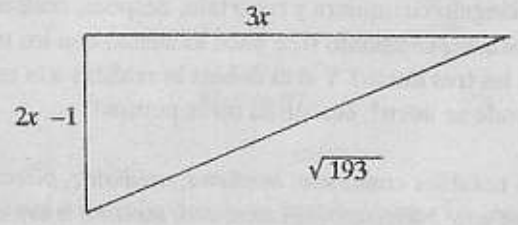


Figura 83.

Ortocentro. Se define como el punto donde se cortan las tres alturas del triángulo.

En un triángulo isósceles la altura correspondiente a la base es también la mediana, mediatriz y bisectriz de dicho triángulo (figura 88).

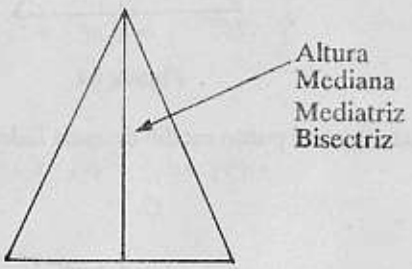
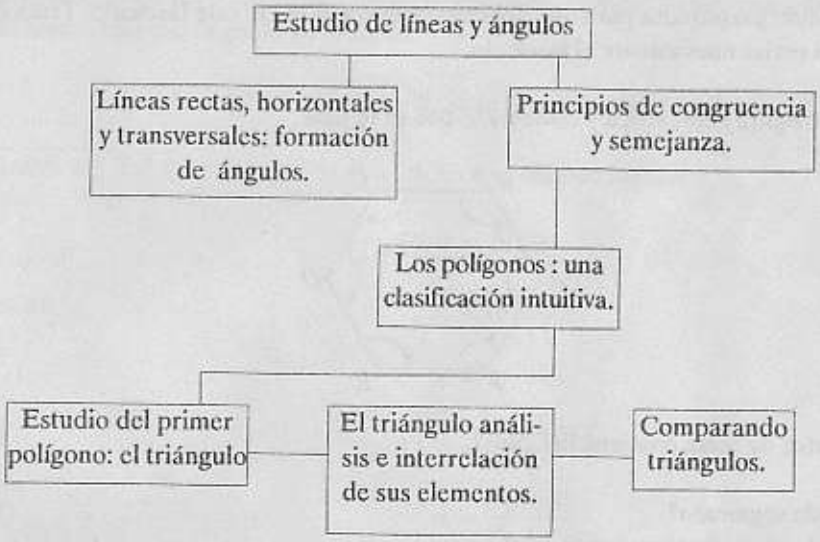


Figura 88.

Con base en lo anterior dibuja cada punto notable.

RECAPITULACIÓN



Observa el esquema anterior. ¿Tiene alguna relación con lo que aprendiste en este fascículo? ¿Cómo lo perfeccionarías? Elabora uno que consideres más completo o adecuado y coméntalo con tu profesor o asesor.

Te habrás dado cuenta que es un triángulo rectángulo. ¿Cómo lo resolverías? Efectivamente, aplicando el teorema de Pitágoras, en donde,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$(2x-1)^2 + (3x)^2 = \left(\sqrt{193}\ \right)^2 .$$

Desarrollando las operaciones daría,

$$4x^2 - 4x + 1 + 9x^2 = 193 .$$

Reduciendo términos semejantes daría,

$$13x^2 - 4x + 1 - 193 = 0$$

$$13x^2 - 4x - 192 = 0 .$$

Como ves, el resultado es una ecuación de segundo grado, trata de resolverla.

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(13)(-192)}}{2(13)}$$

Esto daría:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -3.69$$

Consideramos sólo el valor 4, puesto que la medida se refiere a la longitud de un lado del triángulo.

$$(12)^2 + (7)^2 = \left(\sqrt{193}\ \right)^2$$

$$144 + 49 = 193$$

$$193 = 193$$

RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

En una hoja de papel traza un triángulo cualquiera y recórtalo, después, realiza un doblez a partir de uno de sus vértices a la mitad del lado opuesto. ¿Qué sucede si se hace lo mismo con los tres vértices?, ¿qué nombre recibe el punto en donde se intersectan las tres líneas? Y si el doblez lo realizas a la mitad del triángulo. ¿Qué sucede?, ¿cómo se le llama al punto en donde se unen?, ¿existirán otros puntos?

En el triángulo existen rectas notables como son: *mediana*, *mediatriz*, *bisectriz*, *altura*. Junto con estas rectas aparecen los puntos notables que son: *baricentro*, *circuncentro*, *incentro* y *ortocentro*. Pero si observas las rectas las podemos definir de la siguiente manera:

Mediana: segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto (figura 84).

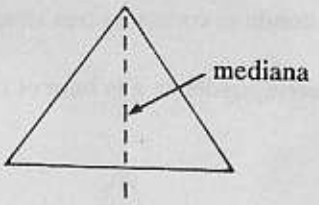


Figura 84.

Mediatriz: perpendicular trazada en el punto medio de cada lado (figura 85).

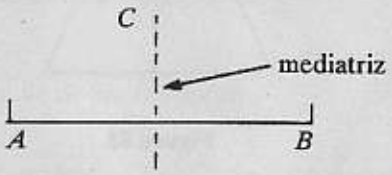


Figura 85.

Bisectriz: recta notable que corresponde a la bisectriz de un ángulo interior. La bisectriz de un ángulo es aquella que divide un ángulo en dos partes iguales (figura 86).

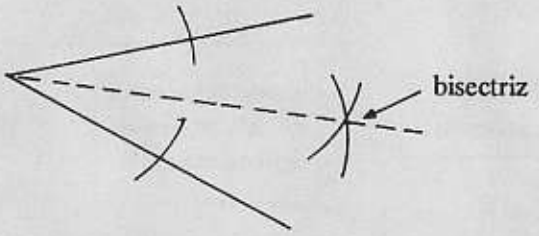


Figura 86.

Altura: perpendicular trazada desde un vértice, en el lado opuesto o en su prolongación. Existen tres alturas que corresponden a cada lado (véase la figura 87).

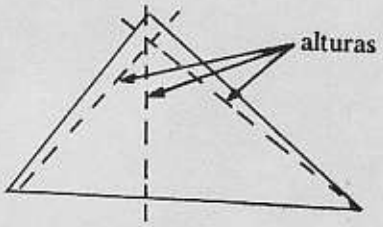


Figura 87.

Los puntos los podemos definir así:

Baricentro. Centro de gravedad del triángulo, donde se llegan a cortar las medianas.

Circuncentro. Punto en donde se intersectan las tres mediatrices; este punto es el centro del círculo circunscrito al triángulo.

Incentro. Es el punto en donde se intersectan las bisectrices. Es el centro del círculo inscrito en el triángulo.

LINEAMIENTOS DE AUTOEVALUACIÓN

A continuación te presentamos las respuestas a las Actividades de Consolidación, compáralas con las tuyas y si tienes alguna duda coméntala con tu profesor o asesor.

1. Seis.

2. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$. $\overline{DE}$. $\overline{EF}$ Y $\overline{FA}$.

3. 1.5cm.

4. Ángulos obtusos.

5. Si = 180 (n-2)

Si = 180 (6-2)

Si = 180 (4)

Si = 720°

$i = \frac{Si}{n} = \frac{720}{6} = 120°$

6. $\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$

$R = \left(\frac{S}{180}\right)\pi$

$R = \left(\frac{120°}{180}\right)3.14$

R = 2.09 radianes

7. Si = 180 (n-2)

Si = 180 (6-2)

Si = 180 (4)

Si = 720°

8. Se le denomina hexágono.

9. Es un polígono regular.

10. $d = (n - 3)$

$d = (6 - 3)$

$d = 3$

11. $d = \frac{n(n-3)}{2}$

$d = \frac{6(6-3)}{2}$

$d = \frac{6(3)}{2}$

$d = \frac{18}{2}$

$d = 0$

12. $e = \frac{360°}{n}$

$e = \frac{360°}{6}$

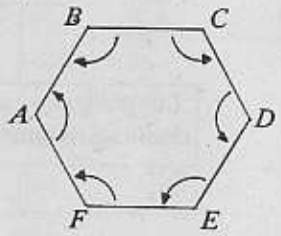
$e = 60°$

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado
Plantel Tepalcingo
SISTEMA DE ENSEÑANZA ABIERTA

ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

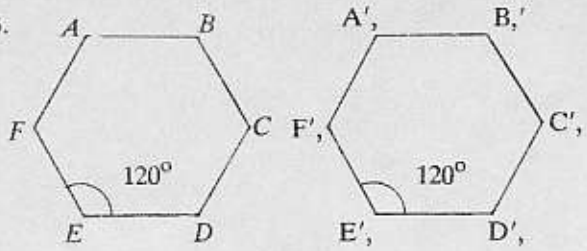
Estas actividades han sido preparadas para que apliques lo aprendido en este fascículo. Trata de resolverlas, en caso de que no puedas revisa nuevamente el fascículo.

Observa la siguiente figura geométrica y contesta lo que se te pide.



1. ¿Cuántos segmentos de recta contiene la figura?
2. ¿Cuáles son?
3. ¿Cuánto mide cada segmento?
4. Clasifica los ángulos que observas según su abertura.
5. ¿Cuánto mide cada ángulo interior?
6. Da la medida de estos ángulos en radianes.
7. ¿Cuál es la suma del total de sus ángulos?
8. ¿Cómo se le denomina a este polígono?
9. ¿Es un polígono regular o irregular?
10. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice?
11. ¿Cuántas diagonales en total se pueden trazar?
12. ¿Cuánto vale cada ángulo exterior de la figura?
13. Dibuja una figura congruente con la dada.

13.



Figuras congruentes

Polígono regular

$AB \cong A'B' = 1.5$ cm

$\measuredangle A \cong \measuredangle A = 120$ cm